现代数学译丛

几　何

（第四卷）

二次型，二次超曲面与圆锥曲线

〔法〕M. 贝尔热　著

陈志杰　周克希　译



科学出版社

1989

内 容 简 介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套数学参考书. 全书共分五卷. 主要内容为: 群在集合上的作用, 仿射与射影空间; 欧氏仿射空间; 凸集与紧多面体; 二次型、二次超曲面与圆锥曲线; 球面与椭圆、双曲几何. 本书配有大量的图和例, 并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍. 本书根据原书第二版翻译.

第四卷介绍二次型、二次超曲面与圆锥曲线.

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考.

M. Berger

GÉOMÉTRIE

4/ Formes quadratiques, quadriques et coniques

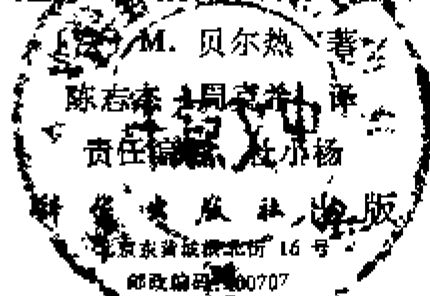
CEDIC/Fernand Nathan, 1979, 2ᵉ édition

现 代 数 学 译 丛

几 何

(第四卷)

二次型、二次超曲面与圆锥曲线



[法] M. 贝尔热 著

陈志杰 周克希 译

责任编辑 [illegible]小杨

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年9月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1989年9月第一次印刷 印张: 6 1/2

印数: 0001—1 425 字数: 171 000

ISBN 7-03-001160-0/O·263

定价: 6.10 元

目　录

第13章 二 次 型

欧氏空间的理论是在定义这种空间的正定二次型的基础上建立起来的. 但在数学的丛林里，以及在力学或物理中，还会遇到很多其它种类的二次型. 正如 Dieudonné 所说的，几乎没有一种数学理论不涉及二次型. 举例说：

——分析中的 Hilbert 空间，Sobolev 空间；

——当维数是一个紧流形的维数的一半时，在这个流形的上同调上由上积所提供的二次型或交错型；

——在数论中，Riemann 几何或在相对论里所用到的 Lorentz 流形；

——在力学中，Liouville 型和统而言之的整个正在蓬勃发展的辛几何，以及挠量都涉及二次型.

本书中二次型除了出现在欧氏空间里，还出现在关于圆锥曲线及二次超曲面的各章中，而且在球面几何(第 20 章)与双曲几何(第 19 章)中，以及关于射影对射的 14.5.5 节里也稍有涉及.

这一章只涉及二次型理论的某几个方面，特别是着眼于刚才提及的各种几何应用. 如要获得更多知识，可参看 [AN]，[S-T]，[BI2]，[SE2].

第一节是定义及例，其中 Artin 空间以后将经常用到. 接着，13.2 节研究非欧氏二次型所表现的种种现象：迷向向量及奇异子空间；与所考虑的二次型相关联的、从 E 到它的对偶空间 E^* 内的线性映射 φ，在这里起着主要作用. 13.3 节研究欧氏空间正交性的扩张. 这一节证明了一个对以后几节有重要意义的技术性结论：可作出任意子空间的非奇异完备化空间. 在 13.4 节内可看到任何二次型允许有正交基；当基域是 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ 时，由此即可推导出这些二次型的分类. 13.5 节专门讨论一个经典的重要问题：在欧氏

结构中，寻找一个二次型的轴。在 13.6 节内引进了二次型 q 的群 $O(q)$，它是欧氏向量空间中正交群的自然推广。我们还证明了有关 Artin 空间的一些技术性结论。可以这么说，Artin 空间是与欧氏空间偏离最大的空间。在 13.7 节证明了二次型的群由超平面对称生成，并且在等度量子空间上是可迁的。这个证明比在欧氏情形时困难得多。最后，13.8 节专门讨论在欧氏平面中所遇到的角及有向角的概念在实 Artin 平面内会变成怎样。在那里，将初次接触到双曲几何，而它是第 19 章的研究对象。

本章中 E 是在特征数不为 2 的域 K 上的有限 n 维向量空间（参见 3.3.2）。E 的向量子空间简称为子空间。

13.1 定义及例

13.1.1 定义. 向量空间 E 中的一个二次型就是 $\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$ 的一个元素 q（参见 3.3.1）。以 P 表示导出它的那个唯一的对称双线性型，并称为 q 的极式。

以后也记 $Q(E)=\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$。

13.1.2 注. 我们有(参见 3.3.2.1):

$$q(x)=P(x,x),\ P(x,y)=\frac{1}{2}\Big(q(x+y)-q(x)-q(y)\Big),$$

$$q(\lambda x)=\lambda^2 q(x).$$

用微分学的语言来说，若 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，则 $q:E\to K$ 是 C^∞ 级的，而且有 Euler 恒等式:

$$q(x)=\frac{1}{2}q'(x)(x),$$

这是因为 $P(x,y)=\frac{1}{2}q'(x)(y)$。对于坐标 $\{x_i\}$，特别可得

$$P(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial q}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n).$$

最后有

$$P(x, y) = \frac{1}{2} q''(0)(x, y).$$

只要 $q: E \to K$ 满足 $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$（即它是二次齐次的）且在 0 点有二阶导数，上述公式即为有效．有了这两个条件就能使 q 成为一个二次型．这一切都是求导法则的结果，可参看［CH1］．其思想仅仅是把 $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ 对于 λ 求导．

13.1.3　例

13.1.3.1　欧氏结构，参看 8.1.1．

13.1.3.2　在相对论中会遇到二次型 $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$．

13.1.3.3　设 $\varphi \in E^*$（E 的对偶空间），则 $q = \varphi^2$ 定义为 $q(x) = (\varphi(x))^2$ 是一个二次型，其极型是 $P(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$．更一般地，若 $\varphi, \phi \in E^*$，可定义 $q = \varphi\phi$ 为 $q(x) = \varphi(x)\phi(x)$，它的极型是 $1/2(\varphi(x)\phi(y) + \varphi(y)\phi(x))$．对于 $k_i \in K$ 及 $\varphi_i \in E^*$ 可类似地定义 $q = \sum_i k_i \varphi_i^2$．

13.1.3.4　若 $\{e_i\}$ 是 E 的基，$\{e_i^*\}$ 是 E^* 的对偶基，则有如下的二次型：

(i)　$q = \sum_{i=1}^{r} (e_i^*)^2 \ (1 \leqslant r \leqslant n)$，或者就记为 $q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$．

(ii)　$q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 \ (1 \leqslant r \leqslant r + s \leqslant n)$．

若 $n = 2p$，且 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,p} \cup \{h_i\}_{i=1,\cdots,p}$ 为 E 的一组基，其相应的坐标记为 x_i, y_i，我们也考虑下述二次型：

(iii)　$q = 2\sum_{i=1}^{p} x_i y_i$．

13.1.3.5　若 $F \subset E$ 是一个子空间且 $q \in Q(E)$，则 q 在 F 上的限制 $q|_F$ 是 F 上二次型．

13.1.3.6　**在基下的表示，相关联的矩阵．** 设 $\{e_i\}$ 是 E 的一个基，P 是 $q \in Q(E)$ 的极型，则 P（从而 q）被 $P(e_i, e_j)$ 的集合完全确定．把 n 阶方阵 $A = (P(e_i, e_j)) = (a_{ij})$ 称为 q 关于

基 $\{e_i\}$ 的矩阵，以 $q \longleftrightarrow A$ 记这种对应关系．若

$$x \cong X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y \cong Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则有：

13.1.3.7
$$\begin{cases} P(x, y) = {}^tXAY = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j = \sum_i a_{ii}x_iy_i \\ \qquad\qquad + \sum_{i<j} a_{ij}(x_iy_j + x_jy_i), \\ q(x) = {}^tXAX = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \sum_i a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j. \end{cases}$$

从这些公式可以看出，不用进行 3.3.2.1 的计算就能从 q 得出 P：把 x_i^2 项换成 x_iy_i，把 x_ix_j 换成 $1/2(x_iy_j + x_jy_i)$ 即可．

如果作基的变换 $\{e_i\} \Rightarrow \{e_i'\}$，其过渡矩阵 S 由 e_i' 关于 $\{e_i\}$ 的坐标所构成(或 $S = M(f)$ 是 f 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵，这里 f 是使 $\forall_i$ 有 $f(e_i) = e_i'$ 的自同态)，则

13.1.3.8 $\boxed{q \text{ 关于 } \{e_i'\} \text{ 的矩阵} = A' = {}^tSAS.}$

因此我们得到例 13.1.3.4 中的矩阵为

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_t 是 t 阶单位阵．

13.1.3.9 逆象． 设 E，E' 是(在同一个域上)两个向量空间，$f \in L(E, E')$ 是态射，且 $q' \in Q(E')$．q' 关于 f 的逆象记为 f^*q'，是如下定义的二次型 $q \in Q(E)$：

$$\boxed{q(x) = (f^*q')(x) = q'(f(x)).}$$

若 P' 是 q' 的极型，则 q 的极型 $P = f^*P'$ 定义为

$$P(x, y) = P'(f(x), f(y)).$$

特别，线性群 $GL(E)$ 通过 $f \longmapsto \{q \longmapsto f^*q\}$ 作用在 $Q(E)$ 上(其实，$GL(E)$ 内的运算应取作相反的运算：这是因为 $(g \circ f)^*q$

$= f^*(g^*q))$. 对于基 $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$, 若 $q' \longleftrightarrow A'$, U 是 f 关于上述基的矩阵，则

13.1.3.10 $\boxed{f^*q' = {}^tUA'U.}$

事实上由 13.1.3.7 有:

$$(f^*q')(x) = {}^tXAX = q'(f(x)) = {}^tf(X)A'f(X) = {}^tX{}^tUA'UX.$$

13.1.4 等价性:分类问题

13.1.4.1 定义. 设 q 和 q' 分别是 E 和 E' 上的二次型，若存在 $f \in \mathrm{Isom}(E; E')$ 使得 $q = f^*q'$，则称 q 与 q' 是等价的. 这时也称结构 (E, q) 与 (E', q') 是等度量的 (参见 8.1.5) 或同构的. 所谓在域 K 上把二次型分类，就是确定 K 上有限维向量空间中二次型(关于上述等价关系)的一切等价类.

13.1.4.2 对任一维数 n, K 上二次型分类问题可归结为确定 $Q(K^n)$ 在 $\mathrm{GL}(K^n)$ 作用下的所有轨道.

13.1.4.3 例. 与 13.1.3.4(iii) 等价的二次型称为中性二次型(这时 $\dim E$ 必须是偶数). 例如,若 $K = \mathbf{C}$, $n = 2p$, 则二次型 $q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 是中性的, 这是因为

$$\sum_{i=1}^{2p} x_i^2 = \sum_{i=1}^{p} (x_i^2 + x_{i+p}^2) = \sum_{i=1}^{p} (x_i + ix_{i+p})(x_i - ix_{i+p}).$$

同理,当 $r = s$, $n = 2r$ 时, 例 13.1.3.4 (ii) 的二次型也是中性的.

13.1.4.4 定义. q 是中性二次型的 (E, q) 称为 Artin 空间. $2p$ 维的 Artin 空间常记为 Art_{2p}; 当 $p = 1$ 时称为 Artin 平面。因此同维 Artin 空间互相同构. 在文献中有时把 Artin 平面称为"双曲平面";但我们不采用这种叫法,因为双曲平面的概念完全是另一回事. 我们将在第 19 章中研究双曲平面.

13.1.4.5 在 13.4.6 与 13.4.7 中我们将完整地解决当 $K = \mathbf{C}$ 及 $K = \mathbf{R}$ 时二次型分类问题. 这是一个简单的问题。但对任意的 K, 这却是一个难题,目前我们几乎无法着手讨论. 已经解决的情形有: 对 $K = \mathbf{Q}$, [SE2] 用整个第 IV 章给出这个问题的

解法;对有限域,参看 [AN], 第143—148页;对代数数域, 差不多需要整整一本书,参见 [OM]. 在 [S-T] 里,读者可以发现许多关于二次型的初等的结果. 至于一般情形, 只有一维时是容易解决的, 我们可以在下面看到.

13.1.4.6 判别式. 13.1.3.8 表明 $\det A$ 依赖于所取的基, 但它在商集 $K/(K^*)^2$ 内的象却与基的取法无关. 这个象被记为 $\mathrm{disc}(q)$, 称为二次型 q 的判别式. 此外, 13.1.3.10 表明两个等价二次型的判别式相等: $\mathrm{disc}(f^*q)=\mathrm{disc}(q)$. 但是,反过来却不正确,例如对 $K=\mathbf{R}$, $n=4$: $q=x^2+y^2+z^2+t^2$, $q'=x^2+y^2-z^2-t^2$ 有相同判别式,但据 13.4.7, 它们不等价.

13.1.4.7 若 $\dim E=1$, 则 q 与 q' 等价的充要条件是 $\mathrm{disc}(q)=\mathrm{disc}(q')$. 这可以从 13.1.3.10 立即得出. 例如若 $K=\mathbf{C}$: $\mathbf{C}/(\mathbf{C}^*)^2=\{0,1\}$, 故有两类二次型: $q=0$, $q=x^2$. 若 $K=\mathbf{R}$: $\mathbf{R}/(\mathbf{R}^*)^2=\{-1,0,1\}$, 则有三类二次型: 0, x^2, $-x^2$. 这是 13.4.6 及 13.4.7 的特殊情形.

今后, (E,q) 表示带有二次型 q 的向量空间, q 的极型是 P.

13.2 奇异元及迷向元,根基,退化性及奇异性

13.2.0 如 8.1.8.1 所示, P 诱导了一个 $\varphi\in L(E,E^*)$: $\varphi(x)(y)=P(x,y)$. 若 $\{e_i\}$ 是 E 的基, $\{e_i^*\}$ 是对偶基, A 是 q 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵,则 A 也是 φ 关于基 $\{e_i\}$, $\{e_i^*\}$ 的矩阵,因为

$$a_{ij}=P(e_i,e_j)=\varphi(e_i)(e_j)=e_j^*(\varphi(e_i)).$$

我们记得, $\varphi\in\mathrm{Isom}(E;E^*)$ 是等价于 $\mathrm{Ker}\varphi=0$ 的.

13.2.1 定义. 称 $q^{-1}(0)$ 为迷向锥面(或光锥). 使 $x\in q^{-1}(0)$ 的向量 $x\in E$ 称为迷向向量. 若 $q^{-1}(0)=0$, 称二次型 q 为非迷向的.

q 的根基是 $\mathrm{rad}(q)=\mathrm{Ker}\varphi=\{x\in E: P(x,y)=0\ \forall y\in E\}$; q 的秩就是 φ 的秩: $\mathrm{rang}(q)=\dim(\varphi(E))$. 若 $\mathrm{rad}(q)=0$, 则称 q 是非退化的, 这等价于 $\mathrm{rang}(q)=\dim E$ 或 $\varphi\in\mathrm{Isom}(E;E^*)$.

若 rad(q) $\neq 0$ 则 q 称为退化的。

对 E 的子空间 F，F 的根基是

$$\mathrm{rad}(F)=\mathrm{rad}(q/F)=\{x\in F:\ P(x,y)=0\ \forall\ y\in F\}.$$

若 $q|_F$ 是非退化的(或退化的)，则称子空间 F 是非奇异的(相应

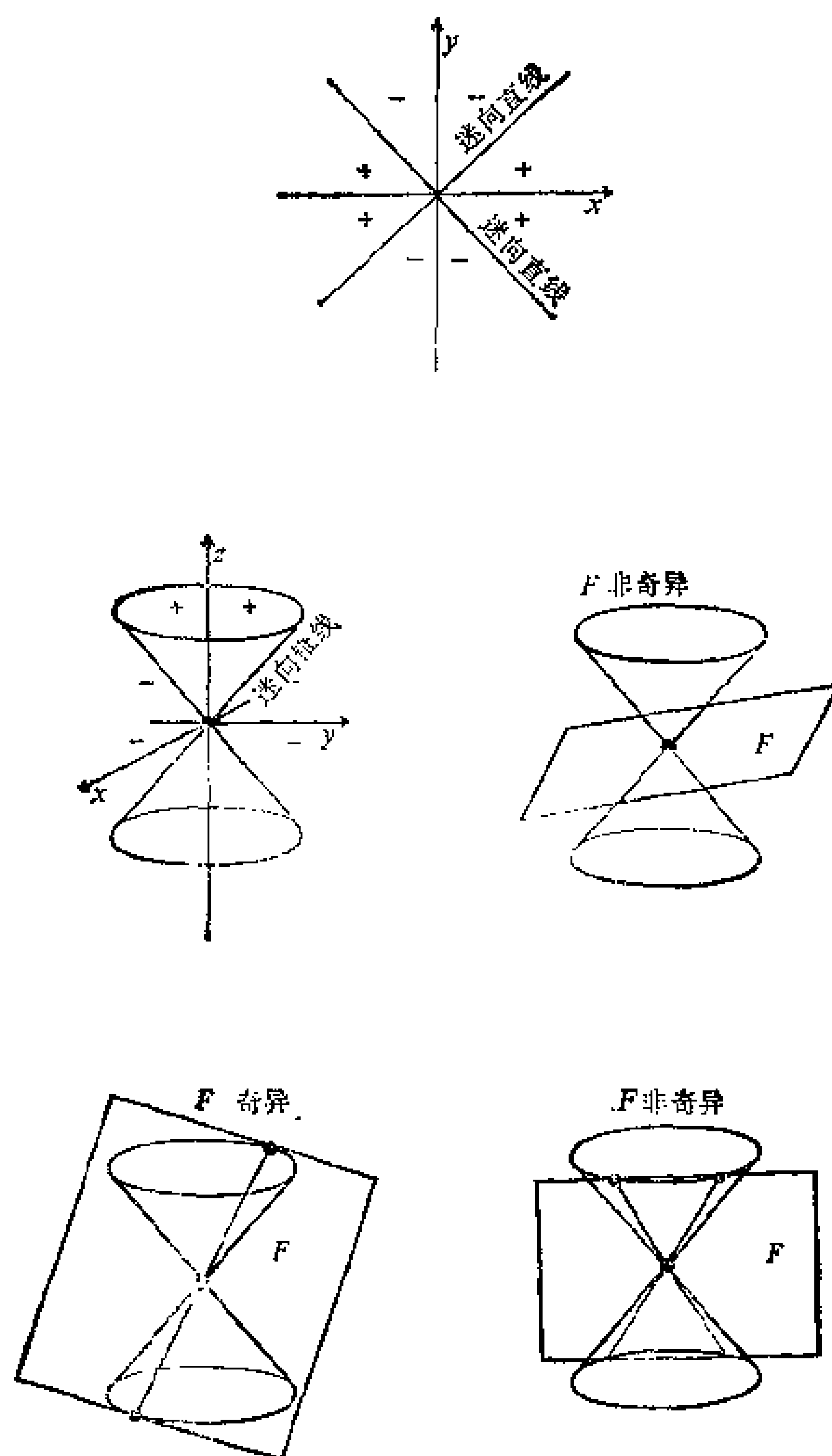


图 13.2.1.

地称为奇异的). 若 $q|_F=0$, 即 $\mathrm{rad}(F)=F$, 则称 F 是完全奇异的.

在图 13.2.1 中,第一个图表示 $\mathbf{R}^2$ 中的 $q=x^2-y^2$, 其余几个表示 $\mathbf{R}^3$ 中的 $q=-x^2-y^2+z^2$. $x^2+y^2-z^2-t^2$ 已经无法图示了, 但我们还是部分地画出了它的迷向锥面在射影空间 $P^3(\mathbf{R})$ 内的投影: 参看图 13.7.10 及 14.4.6.

13.2.2 评注

13.2.2.1 迷向这个词是与 8.8.6.1 相符的. 此外,被我们称为奇异或完全奇异的子空间往往也有人称为迷向或完全迷向的子空间. 但那些称法似易引起混淆.

13.2.2.2 根据初等线性代数, 恒有下式成立:

$$\mathrm{rang}(q)+\dim(\mathrm{rad}(q))=\dim E.$$

13.2.2.3 请注意非迷向与非退化并不等价. 例如 $E=\mathbf{R}^2$ 及 $q=x^2-y^2$. 当然,非迷向蕴含非退化. 若 $K=\mathbf{C}$ (或是代数闭域),则当 $\dim E\geqslant 2$ 时,一个二次型永远不会是非迷向的,这正是 13.7.6 的结果.

13.2.2.4 根据 13.2 的开始部分及 13.1.4.6, 可以看出 q 退化的充要条件是 $\mathrm{disc}(q)=0$; 特别,这个充要条件就是关于某个基有 $\det A=0$.

13.2.2.5 与欧氏空间的情形相反, 甚至 q 非退化时某些子空间也可能是奇异的: 见图 13.2.1 或者更简单地取 $F=Kx$, 这里 x 是迷向的.

13.2.2.6 若 $E=\mathrm{rad}(q)\oplus G$ 是直和, 则 $q|_G$ 非退化 (见 13.9.1).

13.2.3 例

13.2.3.1 若 $(E, q)=\mathrm{Art}_2$, 则 $q^{-1}(0)$ 由 E 的两条不同直线构成, 这两条直线称为迷向直线. 没有附加结构是无法区分这两条直线的(参看 13.7.10 及 13.8.2.1). 它们可确定 q 到相差一个常数倍,这是因为如果取迷向直线上的向量作为基, q 可写成 kxy 的形式.

13.2.3.2 若 $q \longleftrightarrow A$ (参见 13.1.3.6), 则 $\mathrm{rang}(q)=\mathrm{rang}(A)$. 因此例 13.1.3.4 中的秩为: 在 (i) 中等于 r, 在 (ii) 中等于 $r+s$, 在 (iii) 中等于 $2p$. 特别, (iii) 总是非退化的, (i) 是非退化的充要条件是 $r=n$, (ii) 是非退化的充要条件是 $r+s=n$.

13.2.3.3 仍考察例 13.1.3.4, 以下子空间是完全奇异的: 在情形 (i), 若 $K=\mathbf{C}$:

$$F=\mathbf{C}(e_1+ie_2)\oplus\mathbf{C}(e_3+ie_4)\oplus\cdots\oplus\mathbf{C}(e_{2p-1}+ie_{2p}),$$

$$p=\left[\frac{n}{2}\right],\quad \dim F=p;$$

在情形 (ii), 若 $K=\mathbf{R}$:

$$F=\mathbf{R}(e_1+e_{r+1})\oplus\mathbf{R}(e_2+e_{r+2})\oplus\cdots\oplus\mathbf{R}(e_r+e_{2r}),$$

$$\text{若 } r\leqslant s,\ \dim F=r;$$

在情形 (iii), 对任一个 K:

$F=Ke_1\oplus\cdots\oplus Ke_p$, $F'=Kh_1\oplus\cdots\oplus Kh_p$, $\dim F=\dim F'=p$. 其逆可参看 13.7.6. 这里给出一个带有技巧性的引理.

13.2.3.4 引理. 设 (E, q) 是任意取定的, $x\neq 0$ 是迷向向量, $x\notin\mathrm{rad}(q)$, 则存在平面 $P\subset E$ 使得 $x\in P$ 并且 $(P, q|_P)$ 是 Artin 平面. 特别若 (E, q) 中 $\dim E=2$, q 非退化且不是非迷向的,则 (E, q) 是 Artin 平面.

由于 $x\notin\mathrm{rad}(q)$, 故 $\varphi(x)\in E^*$ 非零 (见 13.2.0), 因而存在 z 使得 $P(x, z)=1$. 但不难找到一个

$$y\in Kz+Kx$$

使 $q(y)=0$, 例如 $y=z-\dfrac{q(z)}{2}x$. $q|_{Kz+Kx}$的矩阵是$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,这正是我们所需要的.

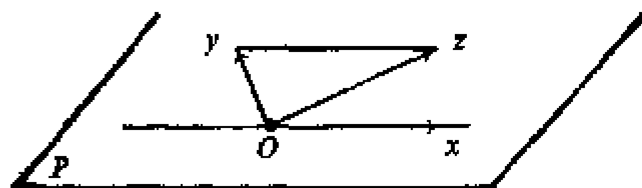


图 13.2.3.

13.2.4 伴随自同态

设 (E, q) 中的 q 非退化，由于 $\varphi\in \mathrm{Isom}(E; E^*)$，我们可仿照 8.1.8.6 的办法来做. 对任一 $f\in L(E; E)=\mathrm{End}(E)$，定义它的伴随自同态 ${}^tf$ 为：

13.2.4.1
$$\begin{cases}\forall x, y\in E: P(f(x), y)=P(x, {}^tf(y)),\ \text{或} \\ {}^tf=\varphi^{-1}\circ f^*\circ\varphi, \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E^* \\ {\scriptstyle {}^tf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ E & \xrightarrow[\varphi]{} & E^* \end{array}\end{cases}$$

其中 f^* 是 f 的普通意义下的转置. 关于互相对偶的基 $\{e_i\}$, $\{e_i^*\}$，若 $q\longleftrightarrow A$，U 是 f 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵，由于 f^* 关于 $\{e_i^*\}$ 的矩阵是 ${}^tU$，我们有

13.2.4.2 $\boxed{U^*={}^tf\ \text{关于}\ \{e_i\}\ \text{的矩阵}=A^{-1}\,{}^tUA.}$

特别，$\det{}^tf=\det f^*=\det f$.

13.3 正交性，子空间的非奇异完备化

仿照欧氏空间的模式，我们给出下列定义.

13.3.1 定义. 设 A 是 E 的子集；置

$$A^\perp=\{x\in E: P(x, y)=0\ \ \forall y\in A\}=\bigcap_{y\in A}\mathrm{Ker}(\varphi(y)),$$

并称为 A 的正交补. 这总是一个向量子空间. 两个子集 A 和 B 若满足 $B\subset A^\perp$，即 $P(x, y)=0\ \forall x\in A, \forall y\in B$，则称 A 和 B 正交，记为 $A\perp B$. 关系 $A\perp B$ 是对称的. 若 $E_i\perp E_j\ \forall i\neq j$，则称直和 $E=\bigoplus_i E_i$ 是正交的，且记为 $E=\overset{\perp}{\bigoplus_i} E_i$. 若 $e_i\perp e_j\ \ \forall i\neq j$，则基 $\{e_i\}$ 称为正交基，若还有 $q(e_i)=1\forall i$，则称为标准正交基.

例如 $\mathrm{rad}(q)=E^\perp$. 一般说来对一个子空间 F，$\dim F+\dim F^\perp\neq\dim E$，因为 q 可能是退化的. 反过来，有以下的初等结果，它们可与 8.1.8.3 一样借助于 2.4.8.1 来进行证明.

13.3.2 命题. 对任一子集 A，有 $A^{\perp}=\langle A\rangle^{\perp}$ 及 $A\subset A^{\perp\perp}$. 假设 q 非退化，则对 E 的任一子空间 F 有 $F^{\perp\perp}=F$，$\dim F+\dim F^{\perp}=\dim E$，$\mathrm{rad}F=F\cap F^{\perp}$. 子空间 F 是完全奇异的充要条件是 $F\subset F^{\perp}$. 我们还有以下等价关系：F 非奇异 $\Longleftrightarrow F\cap F^{\perp}=0\Longleftrightarrow E=F\oplus F^{\perp}\Longleftrightarrow F^{\perp}$ 非奇异. 对两个子空间 F 和 F'，有

$$(F\cap F')^{\perp}=F^{\perp}+F'^{\perp},\ (F+F')^{\perp}=F^{\perp}\cap F'^{\perp}.$$

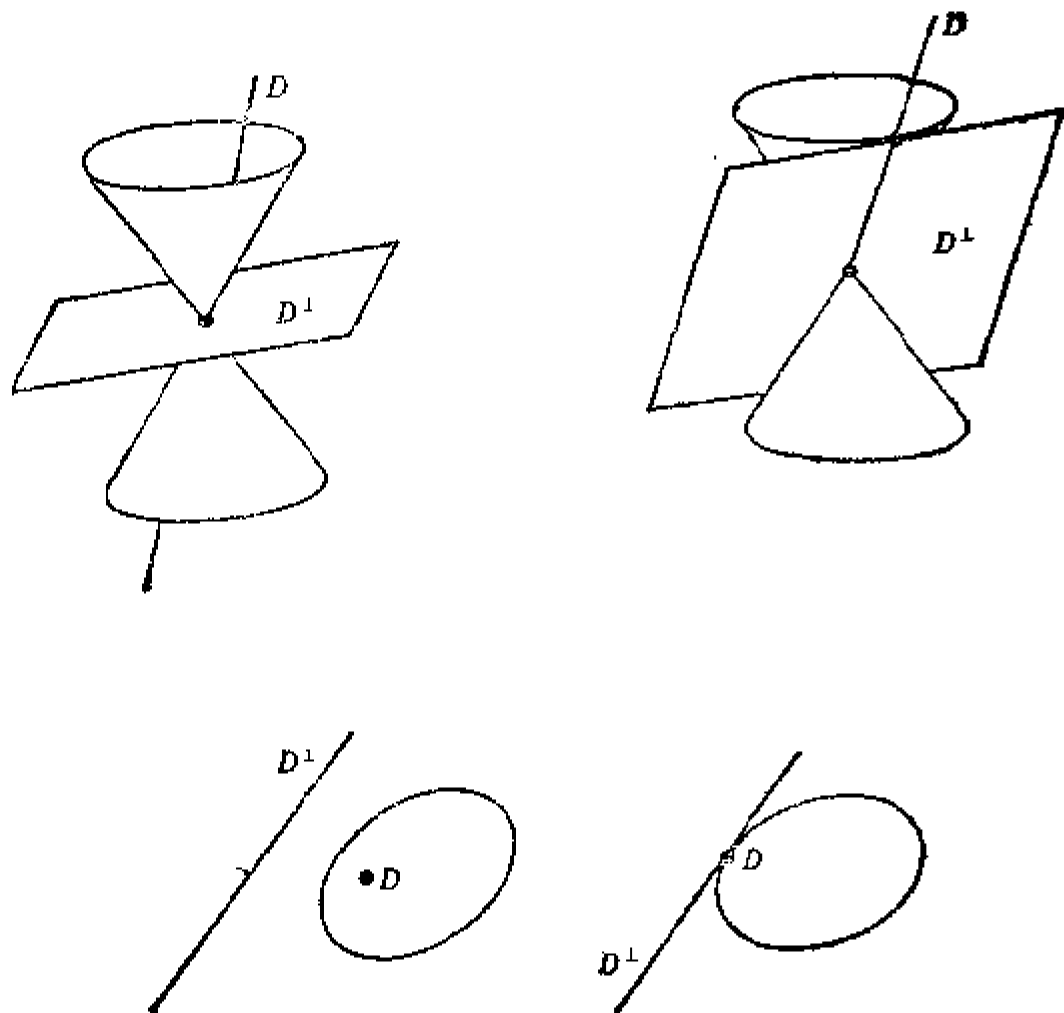


图 13.3.2.

图 13.3.2 表示了仿射平面的截线，它们使人想到一个点关于一条圆锥曲线的"点-配极直线"对偶. 实际上情形正是如此，但我们遵循的步骤与历史发展过程恰恰相反：我们在 14.5 中将利用关于圆锥曲线的定义二次型的对偶性，把它诱导到射影空间中来定义关于圆锥曲线的对偶性.

13.3.3 例

13.3.3.1 若对 (E, q) 有 $E = \overset{\perp}{\bigoplus_i} E_i$，我们可以说 (E, q) 是 $(E_i, q|_{E_i})$ 的直和。反之，若给出了 $E = \bigoplus_i E_i$ 以及每个 E_i 上的一个二次型 q_i，则可通过极型 P 来定义 $q = \overset{\perp}{\bigoplus_i} q_i$：

$$P\left(\sum_i x_i,\ \sum_i y_i\right) = \sum_i P_i(x_i,\ y_i),$$

这里 P_i 是 q_i 的极型。因此

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_i} E_i,\ q|_{E_i} = q_i \forall i.$$

13.3.3.2 在上述意义下，对任一 Artin 空间 Art_{2p} 有：

$$\mathrm{Art}_{2p} = \mathrm{Art}_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Art}_2\ (p\text{ 个项}),$$

再采用 13.1.3.4 (iii) 的记号，有：$E_i = Ke_i \oplus Kh_i \forall i$。

13.3.4 非奇异完备化空间

这是简单的、技术性的，但对后面内容又是基本的。

13.3.4.1 命题. 设 q 非退化，F 是 E 的子空间，$s = \dim(\mathrm{rad}(F))$，$G$ 是 $\mathrm{rad}(F)$ 在 F 内的任一补空间，$\{x_i\}_{i=1,\cdots,s}$ 是 $\mathrm{rad}(F)$ 的一个基，则存在 s 个平面 $P_i \subset E$ 使得对任一 i，$(P_i, q|_{P_i})$ 是一个 Artin 平面，对所有的 i 有 $x_i \in P_i$，对所有的 $i \neq j$ 有 $P_i \perp P_j$，而且 $G \perp P_i \forall i$。此外，正交直和

$$\bar{F} = G \overset{\perp}{\oplus} P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_s$$

是非奇异子空间且 $(\bar{F}, q|_{\bar{F}})$ 同构于 $G \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Art}_{2s}$。这样的 $\bar{F}$ 被称为 F 的非奇异完备化空间。

证明是容易的，只要对 $s = \dim(\mathrm{rad}(F))$ 作递推即可。作为起点可如下进行：$s = 1$，$\mathrm{rad}(F) = Kx_1$，$F = G \overset{\perp}{\oplus} Kx_1$。根据 13.3.2，子空间 $G^\perp$ 非奇异；由于 $x_1 \in G^\perp$，可应用 13.2.3.4：存在

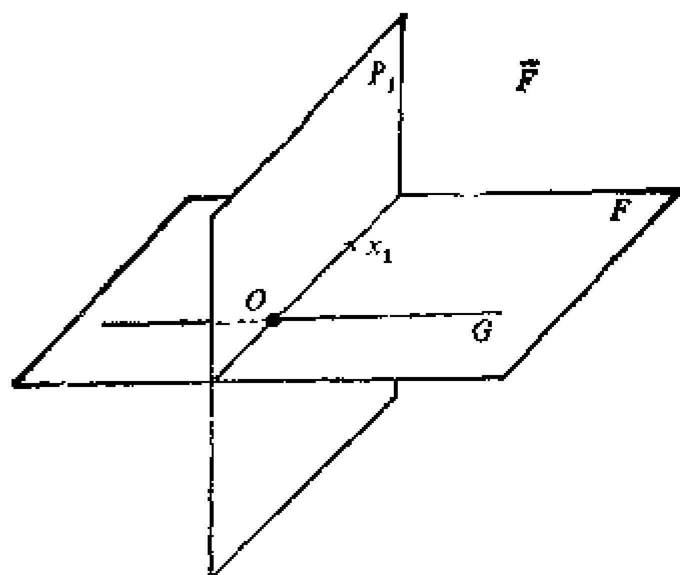


图 13.3.4.

$G^{\perp}$ 的平面 P_1 使 $x_1 \in P_1$，而且 $(P_1, q|_{P_1})$ 是一个 Artin 平面.

关于这个构造的唯一性参看 13.9.3.

13.3.4.2 推论. 设 q 非退化,则对任一子空间 F 有

$$\dim F + \dim(\text{rad}(F)) \leqslant n = \dim E.$$

特别若 F 是完全奇异的,则 $\dim F \leqslant n/2$; 又若 F 是完全奇异的且 $\dim F = n/2 = p$，则必定有 $E = \text{Art}_{2p}$.

本章的其余部分将按如下计划进行: 一部分用初等的方法讨论 $\mathbf{C}$ 及 $\mathbf{R}$ 上的二次型的分类及两个二次型的同时对角化.另一部分用几何代数的方法研究二次型 q 的群 $O(q)$，它是第 8 章正交群的推广,内容有: 寻找简单的生成元,作用在子空间上的可迁性，最后还将提及单性.

13.4 正交基. 关于 C 及 R 的分类

13.4.1 引理. 对任一 (E, q) 至少存在一个正交基 $\{e_i\}$.

若 $q = 0$，这是平凡的.否则设 x 不是迷向的,则 $\varphi(x) \in E^*$ (见 13.2) 非零,因此 $x^{\perp}$ 是超平面，$E = Kx \overset{\perp}{\oplus} x^{\perp}$. 这样问题就归结为维数 $< n$ 的 $x^{\perp}$ 的情形，可用递推法进行下去.

13.4.2 推论. 对任一 (E, q) 存在一个基使得 $q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$，$\lambda_i \in K^*$. 当 $K = \mathbf{C}$ 时，对任一 (E, q) 存在一组基使

$$q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2.$$

当 $K = \mathbf{R}$ 时，对任一 (E, q) 存在一组基使

$$q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{j=r+1}^{r+s} x_j^2.$$

若 $\{e_i\}$ 是 (E, q) 的任一正交基，则有

$$q(x_1, \cdots, x_n) = P\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j x_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i x_j q(e_i, e_j)$$

$$= \sum_i x_i^2 q(e_i, e_i);$$

当 $q(e_i, e_i) \neq 0$ 时，令 $\lambda_i = q(e_i, e_i)$. 若 $K = \mathbf{C}$，则把 e_i 换成 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i$；若 $K = \mathbf{R}$，则当 $\lambda_i > 0$ 时把 e_i 换成 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i$，当 $\lambda_i < 0$ 时换成 $\frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} e_i$.

13.4.3 注. 显然可以把假设 $K = \mathbf{C}$ 换成"K 是一个域，它的任一元均有平方根"，特别，可换成"K 是代数闭域". 同样，$K = \mathbf{R}$ 可换成"K 是一个有序域，其中正元都有平方根".

13.4.4 例. 若 $K = \mathbf{C}$，$n = 2p$，则任一非退化的 q 等价于一个中性二次型，即 (E, q) 与 Art_{2p} 等度量.

13.4.5 由上所述看起来，二次型的分类到 13.4.1 似乎已基本结束. 实际上却如 Artin 所说，连个边都还没有摸着！譬如说，当 $K = \mathbf{R}$ 时，我们就必须证明 $x^2 + y^2 - z^2 - t^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ 不可能等价. 至于一般情形，请参看 13.1.4.5. 现在我们要指出，从 13.4.2 可以推导出以下的：

13.4.6 定理. $\mathbf{C}$ 上两个二次型为等价的充要条件是空间的维数 n 及秩 r 都相等. 或者说：E 给定后，$\mathrm{GL}(E)$ 在 $Q(E)$ 内的轨道有 $n+1$ 个，它们与可能的秩数 $r = 0, 1, \cdots, n = \dim E$ 相

关联．特别，非退化二次型构成一个单独的轨道．

13.4.7 定理（Sylvester 惯性律）． R 上两个二次型等价的充要条件是空间维数 n 以及 13.4.2 的两个整数 r 和 s 都相同．换句话说，E 给定后，$GL(E)$ 在 $Q(E)$ 内的轨道有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个．数偶 (r, s) 既不依赖于 q 也不依赖于 13.4.2 的基，称为 q 的符号数．此外，r 和 s 也可描述如下：r（相应地：s）是使 $q|_F$ 为正定（相应地：负定）二次型（参见 8.1.1，即 $q(x) > 0$（相应地 <0）$\forall x \in F\backslash 0$）的 E 的子空间 F 的最大维数．

只需证明若 q，q' 等价，则 r，s 必定相同．这可从定理末尾的几何特征得出．现在就来证明这个几何特征．设

$$r' = \sup\{\dim F : q|_F \text{ 是正定的}\},$$
$$s' = \sup\{\dim F : q|_F \text{ 是负定的}\},$$

$\{e_i\}$ 是一组基使得

$$q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2;$$

因为 $\mathbf{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_r \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_{r+s}$ 适合对子空间 F 的要求，故 $r' \geqslant r$，$s' \geqslant s$．设 F 使得 $q|_F$ 正定，$G = \mathbf{R}e_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_n$，根据假设，$F \cap G = 0$，从而 $\dim F + \dim G \leqslant n$，即 $r' + (n - r) \leqslant n$，$r' \leqslant r$．同样有 $s' \leqslant s$．

13.4.8 实用约化方法：Gauss 方法． 这就是通过计算来证明 13.4.1；其实际价值是相当大的，我们在以后的具体计算中要用到这个方法，参看 13.9.8．在微分几何中的应用参见 [B-G]，146 页．这种方法可以说是 13.4.1 的对偶，我们要利用线性型，然后再用递推，下面我们将说明最初的几步．如果一个读者从未亲身实践过这一方法，那末动手做一个具体例子是很必要的：见 13.9.6 及 13.9.8．设 $q = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$．

第一种情形：存在 i 使 $a_{ii} \neq 0$，假定是 $\lambda_1 = a_{11} \neq 0$，则

$$q = \lambda_1 x_1^2 + 2Ax_1 + B = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{A}{\lambda_1} \right)^2 + \left(B - \frac{A^2}{\lambda_1} \right),$$

其中 A（相应地：B）是 $x_2,\cdots,x_n$ 的线性型(相应地:二次型)。因此 $B-\frac{A^2}{\lambda_1}$ 是 $x_2,\cdots,x_n$ 的二次型，我们可对它再次施行刚才的变形或做下面的变形。

第二种情形：所有的 a_{ii} 都是零，但(若 $q\neq 0$) 存在一个非零的 a_{ij}，假定这是 $\lambda=a_{12}$，则 $q=\lambda x_1x_2+Ax_1+Bx_2+C$，

$$q=\lambda x_1x_2+Ax_1+Bx_2+C=\lambda\left(x_1+\frac{B}{\lambda}\right)\left(x_2+\frac{A}{\lambda}\right)$$

$$+C-\frac{AB}{\lambda},$$

把

$$\left(x_1+\frac{B}{\lambda}\right)\left(x_2+\frac{A}{\lambda}\right)=uv$$

代换成

$$uv=\frac{(u+v)^2-(u-v)^2}{4};$$

这里 A，B，C 分别是 $x_3,\cdots,x_n$ 的线性型及二次型。

最后可得 $q=\sum_i\lambda_i\varphi_i^2$，$\varphi_i\in E^*$。

这个具体方法也提供了秩数，见 13.9.5。

13.5 两个二次型同时正交化

13.5.1 设 q，q' 是 E 上两个二次型，是否存在一个基 $\{e_i\}$，它同时关于 q 及 q' 是正交的?一般的回答是否定的，例如：在 $E=\mathbf{R}^2$ 上，$q=x^2-y^2$，$q'=2xy$。设 $\{e_i\}$ 是 E 上关于 q 及 q' 的正交基，引入与它们相关联的 φ，$\varphi':E\to E^*$ (见 13.2.0)，又假定 q 非退化，从而可以引入自同态 $f=\varphi^{-1}\circ\varphi':E\circlearrowleft$。则对任一 i，e_i 必是 f 的特征向量：事实上，由假设可知 $(\varphi(e_i))^{-1}(0)$ 就是 q 正交超平面 $e_i^{\perp(q)}$，且 $(\varphi'(e_i))^{-1}(0)=e_i^{\perp(q')}\supset e_i^{\perp(q)}$，因此线性型 $\varphi(e_i)$，$\varphi'(e_i)$ 满足(见 2.4.8.2) $\varphi'(e_i)=k\varphi(e_i)$。例如对 $q=x^2-$

y^2 及 $q'=2xy$，$\varphi^{-1}\circ\varphi'$（关于典范基）的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\text{（见 13.2.0），}$$

这是 $\mathbf{R}^2$ 的一个旋转，因此没有特征向量。

反过来有下述命题。

13.5.2 命题. 若 q 非退化且 $\varphi^{-1}\circ\varphi'$ 有 n 个不同特征值，则存在关于 q 和 q' 同为正交的基。

由假设可知存在 E 的一个基 $\{e_i\}$，它由 $\varphi^{-1}\circ\varphi'$ 的特征向量构成。这时若特征值是 k_i：

$$\varphi'(e_i)(e_j)=k_i\varphi(e_i)(e_j)=P'(e_i,e_j)=k_iP(e_i,e_j),$$

但由 P 及 P' 的对称性：

$$P'(e_i,e_j)=k_jP(e_i,e_j)=k_iP(e_i,e_j),$$

由于 $k_i\neq k_j$，故 $P(e_i,e_j)=0$，$\forall i\neq j$。

13.5.3 例. 若 K 是代数闭域，则两个一般二次型可同时对角化；若 $K=\mathbf{C}$，则概率是 1。

13.5.4.1 注. 对这个问题的完整的研究可参见 [KG2]。

13.5.4.2 几何解释. 在 14.5.4.1 中我们将看到 q 与 q' 的公共正交基的存在性可理解为 $P(E)$ 的与 q,q' 相关联的二次超曲面的公共自配极单形的存在性.在圆锥曲线的情形，我们将对圆锥曲线偶作分类，特别将找出不可能同时正交化的情形，参见 16.4.10.

13.5.5 定理. 设 E 是欧氏空间，q' 是 E 上任意二次型，则总是存在 E 的标准正交基，它关于 q' 也是正交的。

13.5.6 注. 这个结论有相当重要的实际意义.它相当于找出一条圆锥曲线或一个欧氏二次超曲面的轴. 在力学上或物理上这意味着惯性椭球具有轴（惯性轴），并且所有微小的运动有对称性（谐振子），这也使得研究稳定性问题成为可能. [AR] 是一本这方面的出色的参考书。

这个结果可推广到无限维的 Hilbert 空间，这是在分析里的主要推广：微分算子的特征函数的正交基；关于这方面可参看 [WR]，254 页。

定理 13.5.5 有一段历史，它是从实际应用中提出来的，参看 [BI2]，第 189—190 页.

从已知数据出发来具体找出这些基向量的方法，就是确定对称矩阵的特征向量的方法，参看 [KE]，第 392 页.

13.5.7 证明. 经典的证明是利用把 E 扩张成 Hermite 空间，可参看 [DR]，第 58 页.由于我们没有提到 Hermite 空间，故给出另外两种证明.

13.5.7.1 第一种证明. 仿照 13.5.1，对 q' 以及 E 的欧氏结构 q 置 $f = \varphi^{-1}\circ\varphi'$. 根据 7.4.3，存在 E 的子空间 V 使得 $f(V)\subset V$ 及 $\dim V = 1$ 或 2. 若 $\dim V = 1$，则我们已找到 f 的一个特征向量 x；若 $\dim V = 2$，也存在 f 的特征向量. 为理解这一点，首先注意到关于任一标准正交基，f 的矩阵是对称的，这是因为根据 13.2.0，此矩阵是 $A^{-1}A'$，其中 A' 和 A 分别是 q' 及 q 的矩阵. 但关于标准正交基，q 的矩阵是单位阵，因此 f 的矩阵就是 A'，当然是对称的.

因而 $f|_V$ 关于一个标准正交基的矩阵是形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 的，其特征值是实数，即方程

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

的根.

总之至少存在 f 的一个特征向量 x.

取 $e_1 = x/\|x\|$ 且观察 $H = e_1^{\perp}$，有

$$f(H)\subset H \text{ 及 } \dim H < \dim E;$$

经递推后可见存在 E 的标准正交基 $\{e_i\}$，它由 f 的特征向量构成. 这蕴含着

$$\begin{aligned} P'(e_i, e_j) &= \varphi'(e_i)(e_j) = k\varphi(e_i)(e_j) = kP(e_i, e_j) \\ &= k(e_i|e_j) = 0, \forall i \neq j. \end{aligned}$$

即 $\{e_i\}$ 关于 q' 是正交的.

13.5.7.2 微分学的证明. 引入 E 的单位球面 S，定义一个函数 $f: E\backslash 0 \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x)=\|x\|^{-2}q'(x).$$

设 x 使得 $f(x)=\sup\{f(x):x\in S\}$，因 f 在 $E\backslash 0$ 上是 C^{∞} 的，故 f 在 S 上连续，极值必存在．由于 $f(\lambda x)=f(x)\forall\lambda\neq 0\forall x\in E\backslash 0$，故上述向量 x 使 f 取到整个 $E\backslash 0$ 上的极大值，于是 $f'(x)=0$．对 f 求导后可得

$$df(x)(y)=2\|x\|^{-2}[P'(x,y)\|x\|^2-q'(x)(x|y)].$$

因此 $\forall$ 使 $(x|y)=0$ 的 y 有 $P'(x,y)=0$．然后即可与第一种证明一样进行递推．

13.5.8 在 8.2.6 及练习 8.12.1 已给出13.5.5 的一个很有用的应用．

在本章的后半部分，总假定 (E,q) 中的 q 非退化．

13.6 二次型的群．概论

我们将把欧氏空间中的许多概念推广到一般情形．

13.6.1 定义． 我们把由 (E,q) 的等度量变换构成的群 $\{f\in GL(E):f^*q=q\}$ 称为 q 的群或 q 的正交群，记为 $O(E,q)$，$O(E)$ 或 $O(q)$．也记

$$O(n,K)=O\left(K^n,\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right),$$

$O(r,s)=O(\mathbf{R}^{r+s},\ x_1^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-\cdots-x_{r+s}^2)$．群 $O(1,3)$ 称为 Lorentz 群．

13.6.2 评注． 若 (E,q)，(E',q') 等度量，则它们的群 $O(q)$，$O(q')$ 同构．根据 13.2.4，$f\in O(q)$ 等价于 ${}^tf=f^{-1}$，特别有 $\det f=\pm 1$．由此可得：

13.6.3 记号． 令 $O^{\pm}(E)=\{f\in O(E):\det f=\pm 1\}$；$O^{+}(E)$的元素称为旋转．

$O^{+}(E)$ 是 $O(E)$ 内正规子群，$O(E)/O^{+}(E)\cong\mathbf{Z}_2$，还有乘法规则，参看 8.2.3.2．

13.6.4 矩阵记法． 关于 E 的一组基 $\{e_i\}$，若 $q\leftrightarrow A$ 且 f 的矩阵

是 S，由 13.1.3.10 可推导出

13.6.5 $$\boxed{f\in O(q)\Longleftrightarrow {}^tSAS=A.}$$

例如：对 $O(n,K)$：${}^tSS=I$ 或 $S^{-1}={}^tS$，也请参看13.9.12。对 Art_2：

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in O(\mathrm{Art}_2)\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow ac=bd=0,\ ad+bc=\pm1;$$

详见 13.8.2。

我们恒有 $\pm\mathrm{Id}_E\in O(E)$，而且 $-\mathrm{Id}_E\in O^+(E)$ 的充要条件是 $\dim E$ 是偶数。

13.6.6 $O(q)$ 的对合. 在非欧氏的情形，推广 8.2.9，8.2.10 及 8.2.11 时要小心。由于向量空间 E 的对合 f 都是以下形状的：$f|_S=\mathrm{Id}_S$，$f|_T=-\mathrm{Id}_T$，其中 $E=S\oplus T$ 是直和分解，所以我们首先可得：

13.6.6.1 命题. 要使 $GL(E)$ 的一个对合在 $O(q)$ 内，必须且只须 $E=S\overset{\perp}{\oplus}T$，即 S 非奇异，$T=S^{\perp}$。此时称 f 是正交对称或对称。若 S 是超平面，则称超平面对称，若 $\dim T=2$，称为(绕 S 的)翻转。任一超平面对称在 $O^-(E)$ 内，任一翻转在 $O^+(E)$ 内。

对非奇异性的要求使 8.2.12，8.2.13，8.2.11 及 8.2.7 的推广变得复杂多了。例如 8.2.11 变为：

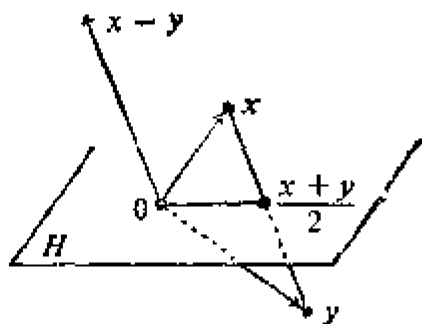


图 13.6.6.

13.6.6.2 引理. 设 $x,y\in E$ 使得 $q(x)=q(y)$，$x-y$ 非迷向；则存在超平面对称 h 使得 $h(x)=y$。

根据 13.3.2，$(x-y)$ 的正交补 $H=(x-y)^{\perp}$ 是非奇异超平面。设 h 是与 $S=H$ 相关联的向量对称，则有 $h(y)=x$。这是因为由

$$P(x-y,x+y)=q(x)-q(y)=0$$

可得 $x+y\in H$，从而

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2},\ y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2},$$

8.2.12 的证明不能直接用上去．为了弥补这一点，我们将建立一些技术性的结果．

13.6.7 旋转的例以及关于 $O(\mathrm{Art}_{2p})$ 的带有技巧性的引理

13.6.7.1 引理． 设 $E=\mathrm{Art}_{2s}$，F 是 s 维完全奇异子空间，$f\in O(E)$ 使 $f(F)=F$，则 $f\in O^+(E)$．

根据 13.3.4，存在由直和分解(非正交的！) $E=F\oplus F'$ 所产生的基使得 $q\leftrightarrow A$，$A=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$． f 关于这个基的矩阵是形如 $\begin{pmatrix}U & V\\ 0 & W\end{pmatrix}$ 的，因 $f(F)=F$．条件 13.6.5 可写成

$$\begin{pmatrix}{}^tU & 0\\ {}^tV & {}^tW\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U & V\\ 0 & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & {}^tUW\\ {}^tWU & {}^tVW+{}^tWV\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

于是 ${}^tUW=I$，然后得 $\det f=(\det U)(\det W)=1$．

13.6.7.2 引理． 设 F 是一个子空间使得 $E=\bar{F}$ 是 F 的非奇异完备化空间，则若 $f\in O(E)$ 以及 $f|_F=\mathrm{Id}_F$，可得 $f\in O^+(E)$．

根据 13.3.4.1，有 $E=G\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Art}_{2s}$，其中 $\mathrm{Art}_{2s}=M\oplus M'$，$F=G+M$，$M=\mathrm{rad}(F)$．由假设，$f|_G=\mathrm{Id}_G$，于是 $f(\mathrm{Art}_{2s})=\mathrm{Art}_{2s}$．由 13.6.7.1 可得 $f|_{\mathrm{Art}_{2s}}\in O^+(\mathrm{Art}_{2s})$，因此

$$\det f=\det(f|_G)\det(f|\mathrm{Art}_{2s})=1\cdot 1=1.$$

13.6.7.3 引理． 设 $f\in O(E)$ 使对任一非迷向的 x 都有 $f(x)-x$ 非零且非迷向，则 $f\in O^+(E)$ 且 E 是 Artin 空间．

这个引理的假设看来有点奇怪，但可这样解释：如果我们想在一般情形下推广 8.2.12 的证明，13.6.6.2 表明除非 f 恰好满足本引理假设，否则就能利用递推法．我们将在 13.7.12 中用到这一点．

现在证明 13.6.7.3．首先假设 $n=2$．因 E 含有非零迷向向量，13.2.3.4 表明 $E=\mathrm{Art}_2$．在 13.8.2 中将看到对于一个适当的基，f

的矩阵或是 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$，或是 $\begin{pmatrix} 0 & k \\ k^{-1} & 0 \end{pmatrix}$，$k \in K^*$. 在第一种情形里，$\det f = 1$，在第二种情形里 $f(x + ky) = x + ky$，与引理假设矛盾.

以后假设 $n \geqslant 3$；首先证明两个子空间 $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ 与 $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$ 是完全奇异的. 对于核集，这就是假设条件；对于象集，当 x 非迷向时，已知 $f(x) - x$ 是迷向的，剩下只需对迷向的 x 加以证明. 设 x 迷向，由 13.3.4.2 可知 $x^\perp$ 不可能完全奇异，因当 $n \geqslant 3$ 时 $n - 1 > n/2$. 故存在 $y \in x^\perp$ 使 $q(y) \neq 0$. 则

$$q(x \pm y) = q(y) \neq 0;$$

把引理假设应用于 3 个向量 y，$x + y$，$x - y$：

$$q(f(x) - x + f(y) - y) + q(f(x) - x - (f(y) - y))$$
$$= 2q(f(x) - x) + 2q(f(y) - y) = 2q(f(x) - x) = 0.$$

令 $U = \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$，由上所述可知 U 是完全奇异的. 直接计算后(同 9.3.1) 可知

$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \perp \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$$

以及

$$\dim(\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)) + \dim(\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)) = \dim E,$$

于是 $U^\perp = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$. 由 13.3.2 知 $U = U^\perp$，$\dim U = \dim E/2$，因此 13.3.4.2 表明 $E = \operatorname{Art}_{2r}$. 但 $f(U) = U$，从而 13.6.7.1 蕴含 $f \in O^+(E)$.

13.6.7.4 这里没有说明满足引理假设的 f 是什么样子的，我们没有用到它的存在性，关于存在性可参看 13.9.15 或 [S-T]，第 238 页以后.

13.6.8 研究计划. 在第 8 章我们已看到正交群作用在任一 Grassmann 流形

$$G_{E,k}(k = 0, 1, \cdots, \dim E) \text{（参见 8.2.7）}$$

上都是可迁的；当 $\dim E = 2$ 时，$O^+(E)$ 是 Abel 群并且与 S^1 同胚(见 8.3.3 及 8.3.6)；$O(E)$ 由超平面对称生成，$O^+(E)$ 由逦转生成(见 8.2.12，8.4.6)；当 $\dim E = 3$ 或 $\geqslant 5$ 时，$O^+(E)$ 关于

它中心的商群是单群；最后在 8.4.1 里又研究了 $O(E)$ 内的 f 的结构．

对于任意的 (E, q)，我们将只研究其中的某几个问题．更完整的研究可参看 [S-T]，这书是初等而非常有趣的，关于一般的论述可参看 [BI2]，关于 Clifford 代数可见 [AN]，关于正交群的单性参见 [DE1]．

首先，$O(E)$ 作用在 $G_{E,k}$ 上一般不是可迁的，因两个同维子空间不必是等度量的．例如 $O(1, 1)$（见 13.6.1）不能把使 $q|_D$ 为负定的直线 D 变换成使 $q|_{D'}$ 为正定的直线 D'．令人惊奇的是 F 和 F' 为等度量的条件已足以保证存在 $f \in O(E) | f(F) = F'$，这就是 Witt 定理：13.7.1．一个有趣的情形就是极大完全奇异子空间，其中还涉及指向．

$\dim E = 2$ 的情形相当类似于欧氏情形，$O^+(E)$ 总是 Abel 的（见 13.8.1），但对 $E = \mathrm{Art}_2$ 及 $K = \mathbf{R}$，$O^+(E)$ 同胚于不相交和 $\mathbf{R} \cup \mathbf{R}$：见 13.8.3．

群 $O(E)$ 总是由关于非奇异超平面的对称所生成，但其证明相当长：见 13.7.12，就是 Cartan-Dieudonné 定理．

$O(E)$ 的单性问题的讨论是很冗长的，参看 [DE1]．

13.6.9 注． 若要作更精细的研究，就须引入 Clifford 代数，正如在第 8 章中引入四元数一样．关于 Clifford 代数，我们可把它与任何一个二次型相联系，而不局限于欧氏情形，参看 [PO]，[AN]，[BI2]．

13.7 Witt 定理及 Cartan-Dieudonné 定理

13.7.1 定理（Witt，1936）． 设 F 和 F' 是 E 的两个子空间，$f: F \to F'$ 是从 $(F, q|_F)$ 到 $(F', q|_{F'})$ 上的等度量映射．则存在 $\hat{f} \in O(q)$ 使得 $\hat{f}|_F = f$．换句话说，$G_{E,k}$ 在 $O(q)$ 作用下的轨道是由关于 q 的限制为等度量的子空间类所构成的．

首先用如下方法归结到 F，F' 非奇异的情形．由 13.3.4.1，

设 $\bar{F}$, $\bar{F}'$ 是 F, F' 的非奇异完备化空间,即

$$\bar{F}=G\overset{\perp}{\oplus}P_1\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}P_r,\ \bar{F}'=G'\overset{\perp}{\oplus}P_1'\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}P_r'.$$

其中 P_i 及 P_i' 的基是 (e_i, h_i), (e_i', h_i'), $e_i'=f(e_i)$. 如果令 $\bar{f}(h_i)=h_i'$ 把 f 扩张为 $\bar{f}:\bar{F}\to\bar{F}'$, 即可得到一个等度量映射.因此以下设 F, F' 非奇异.

首先假定 $\dim F=\dim F'=1$. 取 $x\in F$, $y=f(x)\in F'$, $x\neq 0$. 根据假设,有 $q(x)=q(y)$. $x+y$ 或 $x-y$ 中必有一个非迷向,否则 $q(x+y)+q(x-y)=2q(x)+2q(y)=4q(y)=0$! 根据 13.6.2, 存在关于 $(x+y)^{\perp}$ 或 $(x-y)^{\perp}$ 的超平面对称,设为 g. 则 $g(x)=\pm y$, 因此 $\pm g\in O(q)$ 是 F 到 F' 上的一个等度量变换.

若 $\dim F$ 任意,则对 $\dim F$ 进行递推. 既然 F 非奇异,就可写成 $F=F_1\overset{\perp}{\oplus}F_2$, 使 $\dim F_1$, $\dim F_2<\dim F$, 譬如取 $F_1=K\cdot x$, 其中 x 非迷向即可. 设 $F_1'=f(F_1)$. 根据递推的假设,必存在 $g\in O(q)$ 使 $g|_{F_1}=f$. 暂时局限在 $F_1'^{\perp}$ 内考察. 这个子空间包含 $f(F_2)$ 及 $g(F_2)$ 并且 $f\circ g^{-1}:g(F_2)\to f(F_2)$ 是一个等度量映射, 因而存在 $h\in O(F_1'^{\perp}, q|_{F_1'^{\perp}})$ 使 $h|_{g(F_2)}=f\circ g^{-1}$. 现在再回到整个 E 上, 令 $\bar{f}=(\mathrm{Id}_{F_1'}\overset{\perp}{\oplus}h)\circ g$ 即可.

13.7.2 注. Artin 把 Witt 定理称为一个叫人感到丢脸的定理,他的意思是指, 一个无论从其陈述还是从其数学对象来看都是如此简单的定理,居然要等到 1936 年才被提出并证明, 何况这个定理在各个领域都是极其有用的:

——几何, 见后面, 例如 19.4.6.2;

——数论,在 $\mathbf{Q}$ 上二次型分类时当然会遇到这个定理,见 [SE2], 第 IV 章.

13.7.3 推论. 若 E 的两个子空间 F, F' 是等度量的,则 $F^{\perp}$ 与 $F'^{\perp}$ 也是等度量的.

这个推论可能是出乎意外的. 为了熟悉二次型, 读者也许会

有兴趣尝试去直接证明它.

13.7.4 例. 设 $K = \mathbf{C}$, 则 $G_{E,k}$ 在 $O(q)$ 作用下的轨道是由使 q 在其上的限制具有已给秩的 k 维子空间所构成, 见 13.4.6. 特别, $O(q)$ 可迁地作用在同维非奇异子空间上.

若 $K = \mathbf{R}$, 有类似结论,但 q 在这些子空间上的限制有相同的符号数, 见 13.4.7.

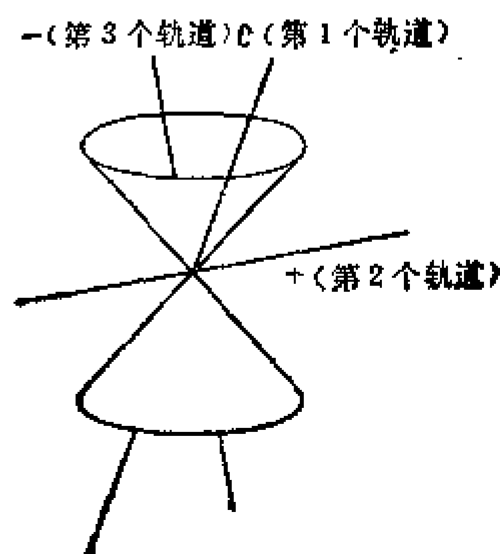


图 13.7.4.

更精确地说,若 $E = \mathbf{R}^3$, $q = x^2 + y^2 - z^2$, 则在 $G_{E,1} = P(E)$ 内有 3 个轨道, 分别对应于符号数 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. 第 1 个轨道由迷向锥面上的直线构成, 第 2 个轨道由严格地位于锥面外部的直线构成, 第 3 个轨道由严格位于内部的直线构成.

关于 $O(1, 1)$ 参看 13.8, 关于 $O(n-1, 1)$ 见 18.10, 19.2, 20.6.

13.7.5 推论. 若一个完全奇异子空间不被包含在任一维数比它更大的完全奇异子空间内,就称为极大完全奇异子空间.于是所有的极大完全奇异子空间有相同维数,这个维数被称为 q 的指数;而且,这些子空间构成 $O(q)$ 的一个轨道.

设 F 和 F' 是极大完全奇异的;若 $\dim F > \dim F'$, 则 $F = F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2$, 其中 $\dim F_1 = \dim F'$. 又设 $f \in \mathrm{Isom}(F_1, F')$ (任意线性映射都是等度量映射!).设 $\bar{f} \in O(q)$ 使 $\bar{f}|_{F_1} = f$; 则 $\bar{f}(F)$

是完全奇异子空间且 $\hat{f}(F)\supsetneq F'$，矛盾.

13.7.6 例. 若 $K=\mathbf{C}$，q 非退化，则 q 的指数 $=[n/2]$. 这是因为 q 等价于 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$（见 13.4.6）并且 13.2.3.3 内构作的子空间 F 是极大的.

若 $K=\mathbf{R}$，q 非退化且符号数是 $\{r, s\}$，则

$$q \text{ 的指数} = \inf\{r, s\}.$$

应用 13.4.7 并且注意到 13.2.3.3 中所构造的子空间 F 是极大的，即可得出上式.

若 $(E, q)=\mathrm{Art}_{2s}$，则 q 的指数 $=s$，13.2.3.3 所构造的 F 是极大的.

13.7.7 评注. 从 Witt 定理可导出一个意想不到的结果：如果 F 是完全奇异的，则任一 $f\in GL(F)$ 都是 $(F, q|_F)$ 的等度量变换，从而 $\exists \hat{f}\in O(q)$ $\hat{f}|_F=f$. 举例来说，$O(q)$ 不仅作用在迷向锥面的直线上是可迁的，并且作用在锥面的点上也是可迁的（也可参见 13.8.4）.

很自然的会提出这样的问题：如果把 $O(q)$ 换成 $O^+(q)$，Witt 定理是否仍正确？回答是：基本上正确. 一个有趣的例外是 $E=\mathrm{Art}_{2n}$，子空间是完全奇异子空间的情形. 反过来，这个例外又给出了一些新的几何现象，参见 14.4.

13.7.8 定理（改进的 Witt 定理）. 当 $O(q)$ 换成 $O^+(q)$，则在满足下述条件时，13.7.1 的陈述仍然有效：

$$\dim F+\dim(\mathrm{rad}(F))<\dim E,$$

否则不再有效. 更精确地说，对于使

$$\dim F+\dim(\mathrm{rad}(F))=\dim E$$

以及 $f\in O^-(q)$ 的任一 F 与 f，不存在使 $g|_F=f|_F$ 的 $g\in O^+(F)$.

首先设 F 使得 $\dim F+\dim(\mathrm{rad}(F))<\dim E$. 再作 F 的非奇异完备化空间 $\bar{F}$（见 13.3.4.1）. 此外，若

$$f\in \mathrm{Isom}(F;F'),$$

由 13.7.1，存在 $\hat{f}\in O(q)$ 使 $\hat{f}|_F=f$. 若 $\hat{f}\in O^+(q)$，则不需再证.

否则，取非迷向的 $x\in F^{\perp}$，设 g 是关于超平面 $x^{\perp}$ 的对称．则 $g|_F=\mathrm{Id}_F$，$g\in O^-(q)$，从而 $f\circ g\in O^+(q)$ 满足要求．

现在设 $\dim F+\dim(\mathrm{rad}(F))=\dim E$，$f\in O^-(q)$．如果 $g\in O^+(q)$，$g|_F=f|_F$，则 $g^{-1}\circ f$ 与 13.6.7.2 矛盾．

上面的讨论并没有提供 $O^+(q)$ 在 $G_{E,k}$ 内的轨道的情况．这由以下定理给出．

13.7.9 定理． $G_{E,k}$ 在 $O^+(q)$ 作用下的轨道与在 $O(q)$ 下的轨道相同，但有唯一的例外：$E=\mathrm{Art}_{2s}$，$k=s$．这时 $O^+(q)$ 作用在 $G_{E,s}$ 的由一切完全奇异子空间构成的子集上恰有二个轨道．

首先考虑不是例外的情形，由 13.3.4.2，存在非迷向的 $x\in F^{\perp}$，则若 $f\in\mathrm{Isom}(F;\ F')$，据 13.7.1，可构造 $\hat{f}\in O(q)$ 使 $\hat{f}|_F=f$．若 $\hat{f}\in O^+(q)$，则不需再证；否则，$\hat{f}\in O^-(q)$．如果把关于超平面 $x^{\perp}$ 的对称记为 h，则 $\hat{f}\circ h\in O^-(q)$ 且 $(\hat{f}\circ h)(F)=\hat{f}(h(F))=\hat{f}(F)=F'$．现在设 $E=\mathrm{Art}_{2s}$，F 是完全奇异的，则根据 13.6.7.1，$O^+(q)$ 确有二个轨道．

13.7.10 例． 第一种要考虑的情形是 $E=\mathrm{Art}_2$．据 13.2.3.1，极大完全奇异子空间是两条迷向直线，记为 I 及 J．显然 $q^{-1}(0)=I\cup J$ 关于 $O(q)$ 稳定．但 13.7.9 允许把 $O^+(q)$（相应地：$O^-(q)$）刻划为

$f\in O^+(q)$（相应地：$O^-(q)$）若 $f(I)=I$（相应地：$f(I)=J$）．即 f 使得各个迷向直线稳定（相应地：置换这些迷向直线）．我们可与 8.8.6.4 相对照并参看 13.8．

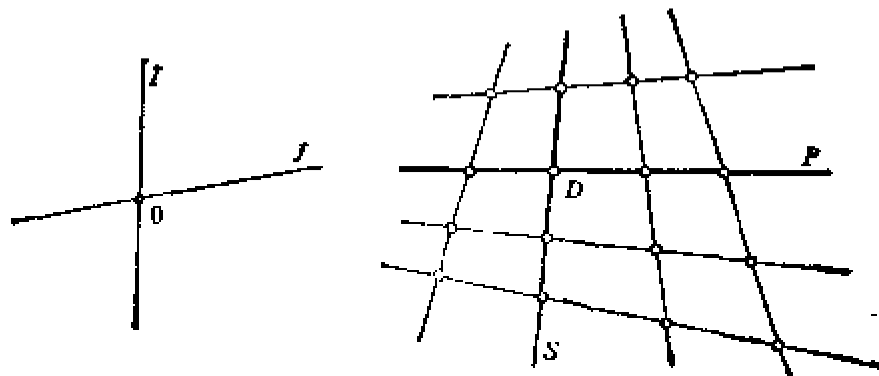


图 13.7.10．

接下去的情形是 $E=\mathrm{Art}_4$，它导致下述有趣的结果：当在射影空间 $P(E)$ 内作解释时，这就是与二次超曲面 $p(q^{-1}(0))\subset P(E)$ 的两族直线(有时被称为母线)有关的结果，见 14.4.1. 上图是作在 $P(E)$ 内的.

13.7.11 推论. 设 Γ 是 $E=\mathrm{Art}_4$ 的完全奇异平面的集合，Π, Σ 是 Γ 在 $O^+(q)$ 作用下的两个轨道. 则

(i) 对 E 的任意迷向直线 D (即完全奇异直线)，存在唯一的 $P\in\Pi$ 及唯一的 $S\in\Sigma$，使得 $D\subset P$, $D\subset S$;

(ii) $\forall P\in\Pi\forall S\in\Sigma$: $\dim P\cap S=1$ (即 $P\cap S$ 是一条迷向直线);

(iii) $\forall P, P'\in\Pi\forall S, S'\in\Sigma$: $P\cap P'=0$ 或 $P=P'$, $S\cap S'=0$ 或 $S=S'$.

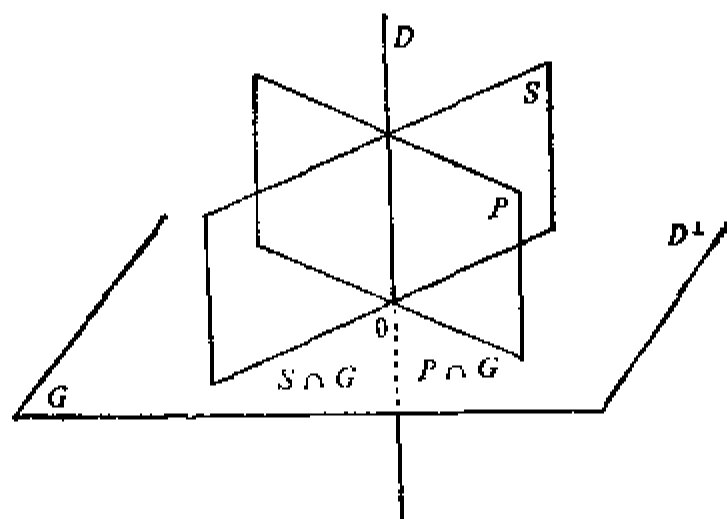


图 13.7.11.

13.7.11.1 借助 13.7.9 所作的证明. 若把 13.7.8 应用 $F=D$ 以及 $P_0\in\Pi$ 或 $S_0\in\Sigma$ 内的任一迷向直线 F'，可知任一迷向直线 D 可被包含在一个 $P\in\Pi$ 或一个 $S\in\Sigma$. 剩下要证 P (以及 S) 的唯一性：设有分解 $D^\perp=D\overset{\perp}{\oplus}G$; G 是一个平面且含有迷向向量，例如 $G\cap P$. 从而 (13.2.3.4) G 是 Artin 平面，它恰含两条迷向直线(见 13.7.10)，这正是 $P\cap G$ 及 $S\cap G$.

设 $P\in\Pi$, $S\in\Sigma$ 是任意的. 假定 $P\cap S=0$, $x\in P\backslash O$, 由于

$\dim x^{\perp}=3$，存在 $y\neq 0$，$y\in S\cap(x^{\perp})$．平面 $T=K\cdot x+K\cdot y$ 完全奇异．由于 T 与 P 相交，由 (i) 表明 $T\in\Sigma$；同理 $T\in\Pi$，这是荒谬的．而 (iii) 可从 (i) 得出．

13.7.11.2 初等的证明． 把 E 的坐标记为 x，y，z，t．由定义得 $q=2xy+2zt$．我们可找出如下的完全奇异平面：一族是

$$\lambda x=-\mu z,\quad \mu y=\lambda t,$$

另一族是：

$$\lambda x=-\mu t,\quad \mu y=\lambda z,$$

其中 $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$，很易验证性质 (i)，(ii)，(iii)．

13.7.12 定理 (Cartan-Dieudonné)． 任一 $f\in O(q)$ 是至多 $n=\dim E$ 个超平面对称的乘积．

仿照 8.2.12 的证明，对 n 作递推．如果存在使 $f(x)=x$ 的非迷向 x 或存在 x 使 $f(x)-x$ 非迷向，则借助关于超平面 $x^{\perp}$ 的对称(见 13.6.6.1) 或借助 13.6.6.2 即可从 $n-1$ 过渡到 n．

只剩下一种情形：对任一非迷向的 x，$f(x)-x$ 总是迷向的．但由 13.6.7.3 可知 $f\in O^{+}(q)$，$E=\mathrm{Art}_{2r}$，特别可知 $n=\dim E$ 是偶数．设 $t\in O^{-}(q)$ 是任意的超平面对称，则因 $t\circ f\in O^{-}(q)$，我们可对它作递推，得 $t\circ f=t_1\cdots t_k$，$k\leqslant n$，于是 $f=tt_1\cdots t_k$．现在只要证 $k\leqslant n-1$．但 $\det f=(-1)^{k+1}$，$f\in O^{+}(q)$ 并且 n 是偶数，因此 $k=n$ 是不可能的．

13.7.13 推论． 若 $\dim E=2$，则 $O^{-}(q)$ 由关于非迷向直线的对称所构成．

13.7.14 注

13.7.14.1 可以研究 8.4.6 的推广：参看 13.9.14 或 [S-T]，332 页．

13.7.14.2 如想研究 $O^{+}(q)$ (关于其中心的商群)的单性，可参看 [DE1]．对 $O^{+}(q)$ 的换位子群的研究可见 [DE1] 或 [S-T]．对 $O^{+}(q)$ 的中心以及欧氏空间相似性的推广研究也可参看 [DE1] 或 [S-T]．

13.7.14.3 8.10 的推广当然是面向 $O(n,\mathbf{C})$ 及 $O(r,s)$ 的，

参见 13.6.1. 但这里不会得到比 8.10 更多的东西，这是因为 $O(n,\mathbf{C})$ 同胚于

$$O(n)\times \mathbf{R}^{n(n-1)/2},$$

而 $O(r,s)$ 同胚于

$$O(r)\times O(s)\times \mathbf{R}^{rs};$$

这些同胚可用初等方法得到，第一种情形可参见譬如说 [CY]，16 页．这实际上是下面的一般定理的特例：任一李群是紧李群与向量空间的拓扑积，参看 [HN]，234 页及 240 页的注．初等情形 $O(1,1)$ 将在 13.8 内研究．

13.7.14.4 也可探索与 8.4.5 及 8.4.6 类似的结果，即 f 可被分解成对称(或迴转)的乘积的最小个数．为此可见 [S-T]，255 页及 260 页或 [AN]，186 页．在 13.6.9 里已经指出，对 $O(q)$ 的更精确的研究必须用到 Clifford 代数，这种代数本身地也是当前的基本数学概念(代数拓扑，K 理论，微分算子)．一般的参考文献是 [PO]，[AN]，[B12]；新近的应用可参见 [A-B-S] 及 [HU]，第 144 页以后．

13.8 二维的情形：Artin 平面，$O(1,1)$

这一节中 $\dim E=2$，仍假定 q 为非退化．

13.8.1 命题．(i) $O^+(E)$ 是 Abel 的；(ii) $O^-(E)$ 由关于非迷向直线的对称所构成；(iii) 对任一 $f\in O^+(E)$, $g\in O^-(E)$ 有 $gfg^{-1}=f^{-1}$.

(ii) 就是 13.7.13．设 $f\in O^+(E)$，$g\in O^-(E)$，因此，$g^{-1}f\in O^-(E)$．设 $f=gg'$，其中 g, $g'\in O^-(E)$．从而由 (ii) 知

$$g^2=g'^2=\mathrm{Id}_E,$$

因此 $gfg^{-1}=ggg'g^{-1}=g'g^{-1}=g'^{-1}g^{-1}=(gg')^{-1}=f^{-1}$.

最后设 f, $f'\in O^+(E)$．取 $O^-(E)$ 中任意一个 g，根据 (iii) 可得

$$ff'=(gf^{-1}g^{-1})(gf'^{-1}g^{-1})=g(f^{-1}f'^{-1})g^{-1}=g(f'f)^{-1}g^{-1}=f'f.$$

13.8.2 命题. 设 $E=\mathrm{Art}_2$ 且 E 有一组基使 q 的矩阵是 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ (见 13.1.3.8)，则 f 关于这个基的矩阵 A 满足：

$$f\in O^-(q)\Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix}0&k^{-1}\\k&0\end{pmatrix},\ f\in O^+(q)\Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}(k\in K^*).$$

特别，$O^+(q)$ 同构于 K^*.

13.8.2.1 我们注意到这个同构与基有关. 若想使它不依赖于基的选取，只须取定一条迷向直线. 当 $K=\mathbf{R}$ 时，这相当于给 E 定向. 与定向的关系如下：设 $x\in I$，$y\in J$，且在 $\mathbf{R}_+x$ 与 $\mathbf{R}_+y$ 间的角状区域由 $q>0$ 的半直线构成，则称 $\{x, y\}$ 是一个定向基(见 8.7.5.4).

为证 13.8.2，利用 13.7.10. 若 $f\in O^+(q)$，则必须 $f(I)=I$，$f(J)=J$，从而 $A=\begin{pmatrix}k&0\\0&h\end{pmatrix}$，由 $\det f=1$ 导出 $h=k^{-1}$. 若 $f\in O^-(q)$，$A=\begin{pmatrix}0&h\\k&0\end{pmatrix}$，$h=k^{-1}$. 反过来很易看出这两个矩阵满足 13.6.5.

现在我们来研究当 $K=\mathbf{R}$ 时，对 Art_2 来说 8.6 与 8.7 会变成怎样. 这就涉及到群 $O(1, 1)$，当然可能相差一个同构 (见 13.6.1). 有关 $K\neq\mathbf{R}$ 时二维的 $O(q)$ 的研究可见 [S-T]，第 271—310 页或 [BI2]，第 160—175 页.

在本章最末这几节，假定 $(E, q)=\mathrm{Art}_2$，$K=\mathbf{R}$.

13.8.3 $O(E)$ 的拓扑. 正时旋转

13.8.2 的映射

$$\mathbf{R}\ni k\longmapsto\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4\ \text{及}\ \mathbf{R}\ni k\longmapsto\begin{pmatrix}0&k^{-1}\\k&0\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4$$

当然是到它的象集上的同胚，因此 $O(E)$ 有 4 个连通分支，每一个都同胚于 R^*_+. 把 $O(E)$ 的单位元的连通分支子群记为 $O^{++}(E)$，它的元素称为 E 的正时旋转. 关于 13.8.2 的基，正时旋转的矩阵是形如 $\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}$ 的，其中 $k>0$.

13.8.4 轨道. 由于 q 能取 >0 以及 <0 的值，故 $O(E)$ 在 $G_{E,1}$ 上不可迁（见 13.6.8）；但根据 13.7.9 或者对目前这种特别简单情形的直接考察，我们知道 $O^{-}(E)$ 作用在使 $q>0$ 的直线上都是可迁的. 图 13.8.4 表示 $O^{++}(E)$ 在 E 内的轨道，轨道上的箭头标明当 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ 中的 k 在 R_+^* 内从 0 变到 $+\infty$ 时，各点的运动方向，这里的基是已取定的（见 13.2.3.1 或 13.8.5）. 几乎所有轨道都是双曲线这一事实说明双曲平面的名称也有它的道理（但我们不采用这个术语，参见 13.1.4.4），另一方面这一事实也证实了"双曲几何"这一名词的合理性，这一几何是与上述情况及其推广相关联的. 参看 13.8.9 及整个 19 章.

从图上可以看出 $O^{++}(E)$ 在 $G_{E,1}$ 内的轨道有 4 个：两条迷向直线，以及使 $q>0$ 的直线和使 $q<0$ 的直线；其证明是显而易见的. $O^{++}(E)$ 作用在半直线的集合上有 8 个轨道：除了 4 条迷向半直线外，还有就是由迷向直线所确定的四个开象限. 此外，$O^{+}(E)$ 作用在例如 $q>0$ 的半直线集合上是单可迁的；$O^{++}(E)$ 作用在已给开象限内的半直线上是单可迁的，作用在例如 $q>0$ 的直线集合上也是单可迁的.

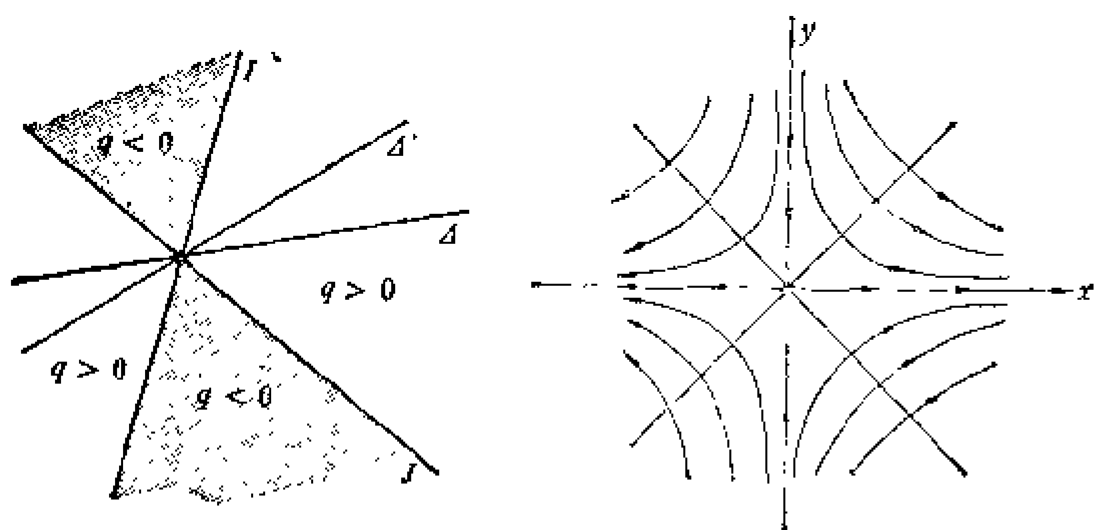


图 13.8.4.

13.8.5 角. 我们可以照搬 8.7 在 E 内建立起关于正时群 $O^{++}(E)$ 的半直线间或直线间的有向角的理论. 我们把这一工作留给读者

去做．不过与 8.3 类似的结果还是值得一提，并且在第 19 章还要用到．我们想要度量 E 内 $q>0$ 的直线间所成的角，即找出一个映射 $\mathbf{R}\to O^{++}(E)$，它是从加法群 $\mathbf{R}$ 到 $O^{++}(E)$ 内的同态．这里比 8.3 容易得多．取定 E 的一个基使 q 的矩阵是 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，或等价地，选取第一条迷向直线设为 I，另一条为 J．则 $f\in O^{++}(E)$ 由 $\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}$ 的 $k\in\mathbf{R}_+^*$ 所唯一确定，所求的同态应为从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}_+^*$ 内的同态，因而是指数映射 $t\longmapsto e^t$．与 8.3.7 的 Λ 相反，这里的映射是双射．

对于已定向的 E，在 $q>0$ 的两条直线间的角 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 的度量是这样的一个唯一实数 t：使 $\Delta'=f(\Delta)$，f 的矩阵是 $\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$．令人感兴趣的是这个度量可借助于交比用纯射影的方法计算．

13.8.6 命题． 设 I，J 是与已选定的基相应的迷向直线，对于使 $q>0$ 的任两条直线 Δ，Δ'，

$$\text{度量}\,(\widehat{\Delta\Delta'})=\frac{1}{2}\log([\Delta,\Delta',J,I]),$$

这里的交比是定义在射影直线 $P(E)$ 内的．

与 Laguerre 公式(见 8.8.7.2)一样，13.8.6 的公式可直接从矩阵 $\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}$ 及 6.6.3 得出．

13.8.7 双曲距离与无向角． 与 8.6 内无向角类似的概念是什么？按照 8.8.7.4，对 $q>0$ 的两条直线，置：

13.8.8
$$\boxed{\overline{\Delta\Delta'}=\frac{1}{2}\,|\log([\Delta,\Delta',J,I])|}$$

由6.3.1，这个定义只与 (E,q) 有关，而与迷向直线 I，J 的选取无关．我们总有 $\overline{\Delta\Delta'}=|\widehat{\Delta\Delta'}|$ 且读者可验证 $\overline{\cdot\ \cdot}$ 是在 $q>0$ 的直线集合上的一个距离．此外，$\overline{\Delta\Delta'}+\overline{\Delta'\Delta''}=\overline{\Delta\Delta''}$ 当且仅当在

8.7.5.2 的意义下 Δ' 位于Δ与 Δ'' 之间(见 6.8.1 且与 8.7.5.3 比较).

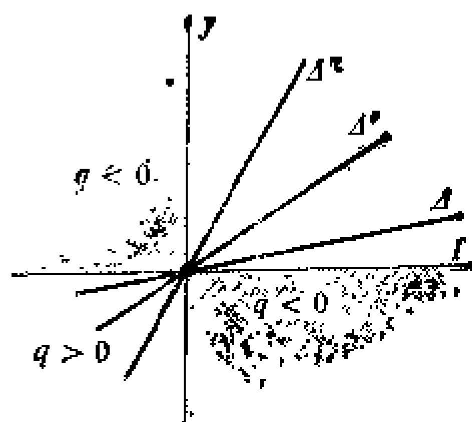


图 13.8.8.

类似于 8.6.3, 有一个更简单的方法定义 $\overline{\Delta\Delta'}$. 为此我们将用到双曲三角,更精确地说,是函数 Arc ch ("反双曲余弦"), 其定义在0.5 节中曾经提及. 我们有下述命题.

13.8.9 命题. 设 Δ, Δ' 是$q>0$ 的两条直线, 则对 $\xi\in\Delta\backslash 0$, $\xi'\in\Delta'\backslash 0$, 纯量 $\dfrac{P(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q(\xi')}}\geqslant 1$ 且有

$$\overline{\Delta\Delta'}=\text{Arc ch}\frac{P(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q'(\xi')}}.$$

对使 $q=2xy$ 的基,设 $\xi=(a,b)$, $\xi'=(a',b')$, 则有

$$\frac{P(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q(\xi')}}=\frac{ab'+a'b}{2\sqrt{aa'bb'}}.$$

这个量显然 $\geqslant 1$. 且若 $\Delta'=f(\Delta)$, f 的矩阵是$\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$,则有

$$a'=e^ta,\quad b'=e^tb,$$

从而

$$\frac{P(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q(\xi')}}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\text{ch}t.$$

13.9 练　　习

13.9.1 设 q 是 E 上二次型，其根基是 $\mathrm{rad}(q)$。证明 q 以自然方式在商向量空间 $E/\mathrm{rad}(q)$ 上定义了一个二次型，且后者总是非退化的。

13.9.2 对 E^* 的有限族 $\{\varphi_i\}$ 以及纯量 $k_i \in K^*$，试研究二次型 $\sum_i k_i\varphi_i^2$ 的秩及根基.

13.9.3 设 F 是 E 的子空间．若子空间 V 满足 $V \supset F$，V 非奇异且 $\dim V = \dim F + \dim(\mathrm{rad}(F))$，证明 V 必是形如 13.3.4.1 的。

13.9.4 把二次型的分类归结为非迷向型的分类问题。

13.9.5 试说明在 13.4.8 的实用方法里出现的总是线性无关的线性型，且这些型的个数等于 q 的秩。

13.9.6 化简 $q = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \pm x_nx_1$，并讨论它的秩.

13.9.7 研究 13.4.8 能否用来证明 13.4.1，并具体说明这个对应关系。

13.9.8 约化 $\mathbf{R}^4$ 上的二次型：

$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xz + xt + zt$；

$\lambda t^2 + yz + zx + xy + \mu(x + y + z)t$（讨论 λ 及 μ）；

$4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy + 4yt + 8zt + \lambda t^2$（讨论 λ）. 再写出它们的极型（见 13.1.3.6）。

13.9.9 对 $K = \mathbf{Q}$ 及 $n = \dim E = 1$，证明存在无限多个不等度量的 (E, q)。

13.9.10 证明若 $n = 1$，K 是有限域，则恰好存在三类二次型。

13.9.11 证明若 $K = \mathbf{R}$，$n \geqslant 3$ 且两个二次型 q 与 q' 满足 $q(x) + q'(x) > 0 \ \forall\ x \neq 0$，则它们允许有一个公共正交基。

13.9.12 用式子明显地写出 $O(3, 1)$ 的矩阵的 16 个元素应满足

的条件。

13.9.13 讨论 $O(q)$ 及 $O^+(q)$ 的中心。

13.9.14 证明 $O^+(q)$ 由迴转生成。

13.9.15 证明若 $f\in O(E)$ 满足 13.6.7.3 的假设，则必须有 $E=\mathrm{Art}_{4p}$。再证明确实存在满足 13.6.7.3 的假设的 f。

13.9.16 证明 $O(E)$ 不可能是交换的，唯一的例外是 $E=\mathrm{Art}_2$，并且K是只含三个元素的域。

第14章　射影二次超曲面

在历史上，射影二次超曲面是作为二次超曲面的射影完备化而出现的，并且是以仿射欧氏圆锥曲线开其先河的．现在的阐述次序恰好相反：射影二次超曲面被定义为在射影空间内与向量空间的一个二次型相关联的对象，而这个射影空间却是这个向量空间导出的．

在某种意义下，我们可以说射影二次超曲面的理论是借助于一本词典从二次型的理论翻译出来的，而这本词典中的定义我们要在这一章中逐步给出．实际上这一章和下一章中难点很少，但它们的存在又是合乎情理的，因为仅仅有一本词典是不足以使人能讲流利的外语的．像 14.5.4.3 那样的结果，对某种实际问题已经显得很有必要，这就是本章仍占相当篇幅的原因．在第 16 章里将利用已构造的工具以证明更隐蔽的结果．

基本的思想是我们可以在射影空间内定义所有源自向量空间及二次型的概念，只要这些概念与非零数乘无关．在给出第一批定义后，14.2 节用到了已知射影空间的二次超曲面本身构成一个射影空间这一事实；作为其特款的二次超曲面束的概念以后在第 16 章里是很基本的内容．14.3 节在基域是实数或复数域的情形下研究了二次超曲面的造型的直观的性质，正如我们在 4.3 节对实和复射影空间所作的研究一样．在 14.4 中考察三维的情形以及所谓“直纹”二次曲面的情形，以极其简单的方式从几何上来给出它们的定义．

14.5 和 14.6 研究对偶性．关于一个二次超曲面的配极变换的概念在应用中是很基本的．实际上我们在讨论凸集时已在 11.1.5 中遇到过这个概念．

圆锥曲线的情形将在第 16 章中更详细地进行研究．

在整个这一章里，假定 E 是特征数不为2的域 K 上的有限 $n+1$ 维向量空间。与 E 相关联的射影空间记为 $P(E)$，$p: E\backslash 0\to P(E)$ 是典范投影。记 $Q(E)$ 为 E 上二次型的向量空间；若 q 是 E 上二次型，则将它的极型记为 P。而且我们总假设 $\dim P(E)=n\geqslant 1$。

14.1 定义及例

设 $q\in Q(E)$，如果把 q 换成 kq，$k\in K^*$，则它的去掉 0 后的迷向锥面在 $P(E)$ 内的投影 $p(q^{-1}(0)\backslash 0)$ 并不改变。这就启发我们引入向量空间 $Q(E)$ 导出的射影空间 $PQ(E)=P(Q(E))$。请注意，当 q 换成 kq 时，q 的秩、指数(见 13.2.1 及 13.7.5) 以及它的根基都不改变。这就导致以下的定义。

14.1.1 定义. 我们把 $PQ(E)$ 的元素 α 称为 $P(E)$ 的(射影)二次超曲面。α 的象 $\mathrm{im}(\alpha)$ 是

$$\mathrm{im}(\alpha)=p(q^{-1}(0)\backslash 0),$$

其中 $p(q)=\alpha$。$P(E)$ 的二次超曲面全体所成的射影空间就是 $PQ(E)$。当 $n=2$ 时 α 也称为圆锥曲线。若 $p(q)=\alpha$，则称 q 是 α 或 $\mathrm{im}(\alpha)$ 的一个方程。若 α 的一个方程非退化，则称二次超曲面 α 是正常的。α 的秩或指数就是它的某一个方程的秩或指数。如果有一个方程是退化的，就称此二次超曲面是退化的。

14.1.2 注. 以后我们不再每次指明“q 是 α 的一个方程”，凡是写 $q, q', \cdots$ 总是指 $\alpha, \alpha', \cdots$ 的方程。

由于 $q=0$ 已被排除，故二次超曲面的秩总是 $\geqslant 1$ 的。

14.1.3 例

14.1.3.1 若 q 非迷向，则 $\mathrm{im}(\alpha)=\emptyset$，正如在欧氏空间里的 $q=\|\cdot\|^2$ 一样。但这不能作为一个理由，就此不再讨论二次超曲面 α 了。尤其是它的极型 P，还是很值得讨论的，参看 14.5.2.0。与此相反的是 k 为代数闭域的情形，这时根据 13.7.6，$\mathrm{im}(\alpha)\neq\emptyset\ \forall\alpha\in PQ(E)\ \forall n\geqslant 1$。

14.1.3.2 命题. 设 $n=1$，α 是二次超曲面。若秩 $(\alpha)=1$，

则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 含一个点，若秩 $(\alpha)=2$，则或者 $\mathrm{im}(\alpha)=\varnothing$，或者 $\mathrm{im}(\alpha)$ 含 2 个不同的点．此外若 α' 是 $P(E)$ 的另一个二次超曲面，如果 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\alpha')$，且 $\mathrm{im}(\alpha)\neq\varnothing$，则 $\alpha=\alpha'$．

只需应用 13.2.3.4 及 13.2.3.1 即可。

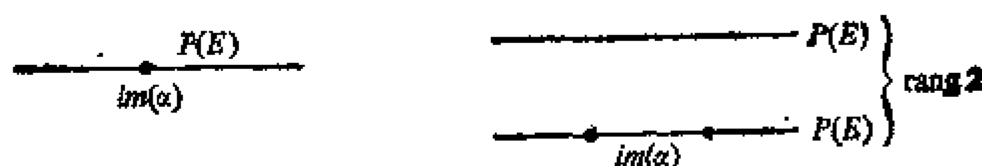


图 14.1.3.

14.1.3.3 遗传性． 设 α 是 $P(E)$ 的二次超曲面，$S=p(F)$ 是 $P(E)$ 的射影子空间．则若 F 关于 q 不是完全奇异的，我们即可定义 α 与 S 的交为二次超曲面 $\alpha\cap S$，它是以限制 $q|_F$ 作为方程的二次超曲面。当然我们有

$$\mathrm{im}(\alpha\cap S)=\mathrm{im}(\alpha)\cap S,$$

与此相反，若 F 是完全奇异的，则 $S\subset\mathrm{im}(\alpha)$，其逆亦真．

14.1.3.4 与直线的交． 把 14.1.3.2 与 14.1.3.3 合在一起，即可得出以下事实．设 $\alpha\in\mathrm{PQ}(E)$，$D=p(F)$ 是 $P(E)$ 的一条直线，则 $D\subset\mathrm{im}(\alpha)$ 当且仅当 F 是完全奇异的；$D\cap\mathrm{im}(\alpha)$ 仅含一个点当且仅当 F 是奇异的但又不是完全奇异的；否则 $D\cap\mathrm{im}(\alpha)$，是空集或含 2 个点．特别由 $\#(D\cap\mathrm{im}(\alpha))\geqslant 3$ 可导致 $D\subset\mathrm{im}(\alpha)$．

14.1.3.5 定义． 设 $S=p(F)$ 是 $P(E)$ 的子空间，若 F 关于 q 奇异，则称 F 与二次超曲面 α 相切，对任一 $m\in\mathrm{im}(\alpha)\cap S$，称 F 与 α 切于 m．若 α 是正常的，$m\in\mathrm{im}(\alpha)$，则称使 $p(x)=m$ 的射影超平面 $p(x^{\perp})$（见 13.3.1）为与 α 切于 m 的超切平面．

14.1.3.6 由 14.1.3.4，要使射影直线 D 与 α 相切，必须且只须 $\#(D\cap\mathrm{im}(\alpha))$ 等于 1 或 $\geqslant 3$．当 α 正常时，与 α 切于 x 的超平面是所有与 α 相切且含 x 的直线的并集．这是因为由 14.1.3.4 可知，或者 $D\subset\mathrm{im}(\alpha)$，或者 $D\cap D^{\perp}=\{x\}$，从而在两种情形里都有 $D\cap D^{\perp}\ni x$，由 13.3.2，有 $(D\cap D^{\perp})^{\perp}\subset x^{\perp}$，即 $\langle D^{\perp}\cup D\rangle\subset x^{\perp}$，特别有 $D\subset x^{\perp}$．

14.1.3.7 我们用二次超曲面的语言重新解释 9.5.5。若 X 是欧氏仿射空间，二次型 N^C 是 $\vec{X}$ 上范数的复化，则 N^C 属于 $Q(\vec{X}^C)$ 并且定义 $P(\vec{X}^C)$ 的一个二次超曲面，它的象称为 X 的脐. N^C 是正常的，因此当 $\dim X = 2$时由 2 个点构成(见 14.1.3.1 及 14.1.3.2)，称为 X 的循环点。

14.1.3.8 同构下的象. 设 E, E' 是两个向量空间, $\bar{f}\in \mathrm{Isom}(E;\ E')$, 与它相关联的同构是:

$$f\in \mathrm{Isom}\,(P(E);\ P(E'))\ (\text{见 } 4.5)\ \text{及}\ \alpha\in PQ(E).$$

所谓 α 在 f 下的象是 $P(E')$ 的一个二次超曲面，它的一个方程是 $((\bar{f})^{-1})^*(q)$ (见13.1.3.9), 这里 q 是 α 的一个方程. 把这个象记为 $f(\alpha)$. 由定义可得

$$\boxed{\mathrm{im}\,(f(\alpha))=f\,(\mathrm{im}\,(\alpha)).}$$

作为特例, $P(E)$ 的射影群 $GP\,(E)$ 作用在 $PQ\,(E)$ 上(而且不需象 13.1.3.9 中那样颠倒其运算规则).

14.1.4. 写法及具体的计算.

14.1.4.1. 我们将利用与 E 的一组基 $\{e_i\}$ 相关联的齐次坐标(见 4.2.3); 若 A 是 q 关于这个基的矩阵 (见 13.1.3.6), 则 $\mathrm{im}\,(\alpha)$ 就是满足

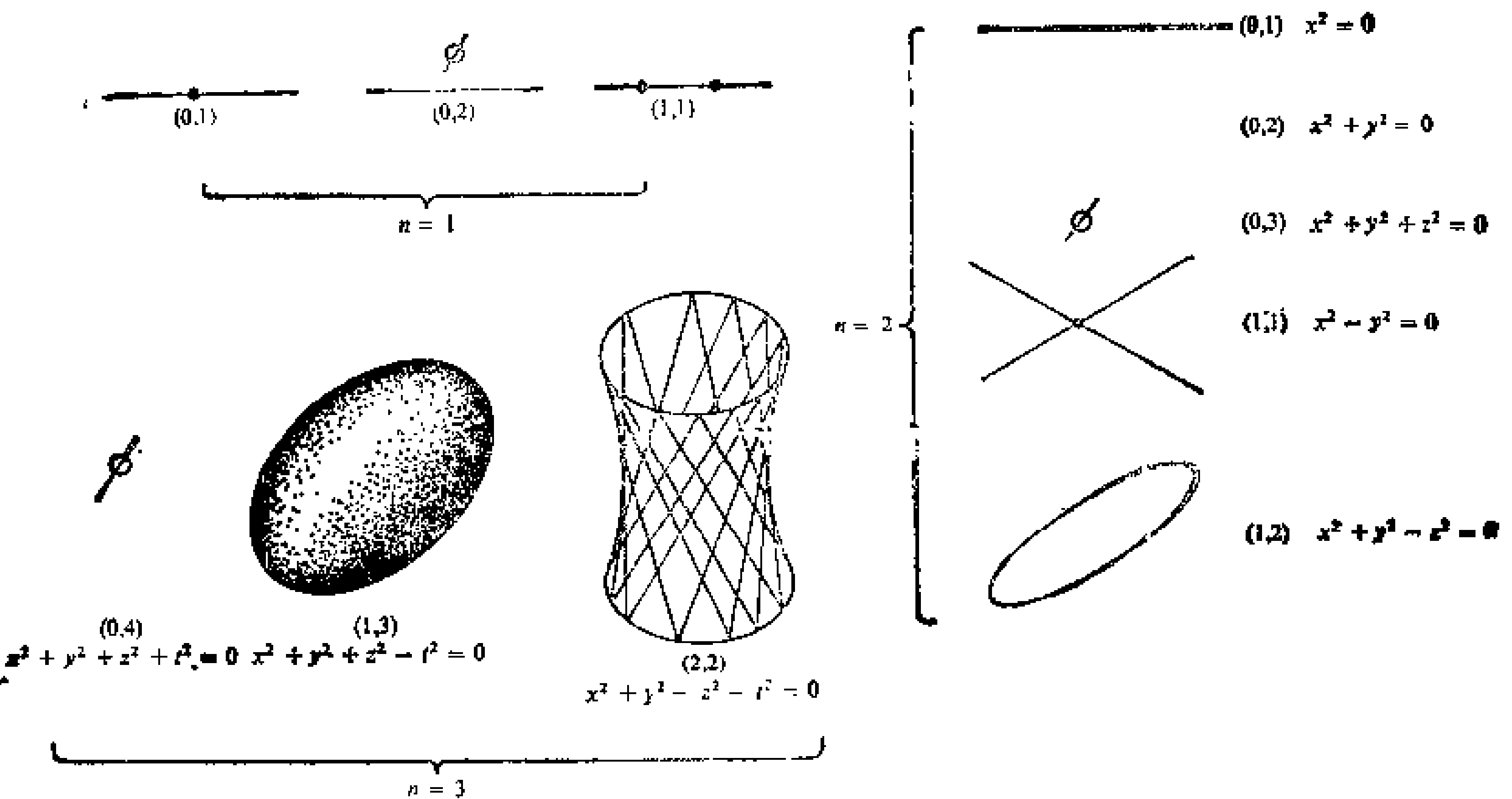
$$^tXAX = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0,\quad X = \begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

的点 $X = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的集合。

14.1.4.2. 由 13.2.2.4, α 是正常的等价于 $\det A \neq 0$, 由此可见在 $PQ\,(E)$ 内的退化二次超曲面构成一个 $n+1$ 次代数超曲面。

14.1.4.3. 关于 E 的一个已知基设 A 是 q 的矩阵, S 是 $\bar{f}\in GL(E)$ 的矩阵, 则根据 13.1.3.10 及 14.1.3.8, 像 $f(\alpha)$ 的一个方程的矩阵为 $^tS^{-1}AS^{-1}$.

14.1.5 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时二次超曲面的分类. 这涉及找出 $PQ\,(E)$



∅
(0,1)
(0,2)
(1,1)
n = 1
(0,4)
x² + y² + z² + t² = 0
(1,3)
x² + y² + z² − t² = 0
(2,2)
x² + y² − z² − t² = 0
n = 3
n = 2
(0,1) x² = 0
(0,2) x² + y² = 0
(0,3) x² + y² + z² = 0
(1,1) x² − y² = 0
(1,2) x² + y² − z² = 0

图 14.1.5.

在按 14.1.3.8 所定义的 GP(E) 的作用下的轨道。但 13.4.6 及 13.4.7 已给出 GL(E) 作用在 $Q(E)$ 上的轨道，且 GP(E)= GL$(E)/K^*\mathrm{Id}_E$ (见 4.5.9)，剩下的就看一下 $K^*\mathrm{Id}_E$ 怎样作用在 $Q(E)$ 的轨道上。在复数域的情形，秩关于 $q\longmapsto kq(k\in\mathbf{C}^*)$ 是不变的，因而 PQ(E) 内的轨道不少于 $Q(E)$ 内的轨道。但当 $K=\mathbf{R}$ 的情形相反，这时，若 q 的符号数是 (r, s)，则当 $\lambda<0$ 时 λq 的符号数是 (s, r)。因此我们有：

14.1.5.1 定理. 当 $K=\mathbf{C}$ 时，在 GP(E) 作用下 $P(E)$ 的二次超曲面形成 $n+1$ 个轨道，它们以秩 $k: 1\leqslant k\leqslant n+1$ 作为指标。当 $K=\mathbf{R}$ 时，$P(E)$ 的二次超曲面的轨道以整数偶 (r, s) 作为指标，其中

$$1\leqslant s\leqslant r\leqslant n+1;$$

作为特例，有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ 种正常二次超曲面(其中$[\cdot]$指整数部分)。

14.1.5.2 注. 我们在这里当然可以跟 13.4.3 中同样地进行讨论。

在实数的情形，据 13.7.6，我们也可用秩及指数对轨道分类，因为秩 $(q)=r+s$，指数 $(q)=s$。

14.1.5.3 例. 若K是代数闭域，则正常二次超曲面仅有一个轨道。

当 $K=\mathbf{R}$ 时，若 $n=1$，则有 3 种类型：(0, 1)，(0, 2)，(1, 1)，它们分别给出：一个点，空集，2 个点。若 $n=2$，有 5 种类型 (0, 1)，(0, 2)，(1, 1)，(0, 3)，(1, 2)，它们分别给出：一条直线(称为双重直线)，一个点，2 条直线，空集，一条正常圆锥曲线。若 $n=3$，有 3 类正常二次曲面 (0, 4)，(1, 3)，(2, 2)，它们分别给出：空集，以及 2 类二次曲面。关于 $n=2$ 时例 (1, 2) 的拓扑及 $n=3$ 时例 (1, 3)，(2, 2) 的拓扑请参见 14.3.3。

14.1.6 零点定理

14.1.6.1 象映射是 $\mathrm{im}(\cdot)\colon \mathrm{PQ}(E)\to\mathscr{P}(P(E))$，这里 $\mathscr{P}(P(E))$ 是 $P(E)$ 的子集的集合.如果这个映射是单射，那末二次超曲面的定义 14.1.1 就会有更大的价值。那时代数的定义将会和一个几何的定义相一致。不过在一般情形下并非如此，例如若 $E=\mathbf{R}^3$，方程为 $q=x^2+y^2$ 及 $q'=x^2+2y^2$ 的二次超曲面有相同的象，即射影坐标为 (0, 0, 1) 的点，但这两个方程代表不同的二次超曲面。尽管如此，我们有以下定理。

14.1.6.2 定理. 若 K 是代数闭域，则

$$\mathrm{im}(\cdot)\colon \mathrm{PQ}(E)\to\mathscr{P}(P(E))$$

是单射.

设 q,q' 使 $p(q^{-1}(0)\backslash 0)=p(q'^{-1}(0)\backslash 0)$，由 14.1.3.1，存在 $x\in E\backslash 0$ 使 $q(x)\neq 0$.必要时用一个常数乘 q'，即可假设 $q'(x)=q(x)$。设 $y\in E\backslash 0$ 使 $p(y)\neq p(x)$，并把射影直线 $\langle p(x),\ p(y)\rangle$ 记为 D。据 14.1.3.2，由于 $D\cap\mathrm{im}(p(q))=D\cap\mathrm{im}(p(q'))$，就有 $\alpha\cap D=\alpha'\cap D$；作为特例，

$$\frac{q'(y)}{q(y)}=\frac{q'(x)}{q(x)}=1.$$

所谓"零点定理"是指一个关于代数簇的一般定理，14.1.6.2 仅是它的一个非常特殊的情形.可参见 [FN] 第 21 页。$K=\mathbf{R}$ 的情形可见 14.8.9。

14.1.7 约化为非退化情形. 这一小节里要从几何角度用象集来描述 13.2.2.6 的结果、把 $p(\mathrm{rad}(q))$的点称为二次曲面的奇异点，它们的集合是一个射影子空间，称为 α 的根基。实际上，若关于一个基 $\{e_i\}$ 有 $q\longleftrightarrow A$，这就相当于求解使 $AX=0$ 的列向量 X，即 A 的特征值为 0 的特征向量，也即 $\sum_i a_{ij}x_i=0\ \forall i$ 的解或方程组 $\partial q/\partial x_i=0$ 的解(见 13.1.2)。

设 $E=\mathrm{rad}(q)\oplus G$ 是一个直和，A 是 α 的根基，即 $A=p(\mathrm{rad}(q))$，B 是在 $P(E)$ 的子空间 $p(G)$ 内由方程 $q|_G$ 所对应的二次超曲面的象，则 A 和 B 是 $P(E)$ 的两个子集。若 $B=\emptyset$，就有 $\mathrm{im}(\alpha)=A$，若 $B\neq\emptyset$，则有以下命题:

14.1.7.1 命题. α 的象是以 A 为顶点以 B 为底的劈锥曲面，也就是说 $P(E)$ 中一切使 $m\in A$, $n\in B$ 的射影直线 $\langle m, n\rangle$ 的并集.

设 $x\in E\backslash 0$ 使 $p(x)\in \mathrm{im}(\alpha)$, 即 $q(x)=0$. 记 $x=y+z$, $y\in \mathrm{rad}(q)$, $z\in G$. 则

$$0=q(x)=q(y+z)=q(y)+2P(y, z)+q(z)=q(z),$$

因此 y 可是 $\mathrm{rad}(q)$ 内任意向量, z 在 $q^{-1}(0)$ 内.

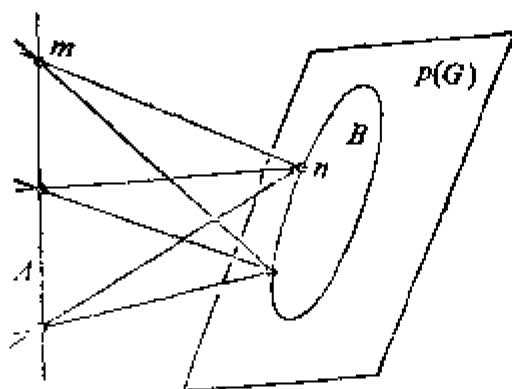


图 14.1.7.1.

14.1.7.2 例如，若 $\dim(\mathrm{rad}(q))=1$, 则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 在 $P(E)$ 内是一个真正的锥面,其顶点是点 $p(\mathrm{rad}(q))$, 其底是 $p(G)$ 的

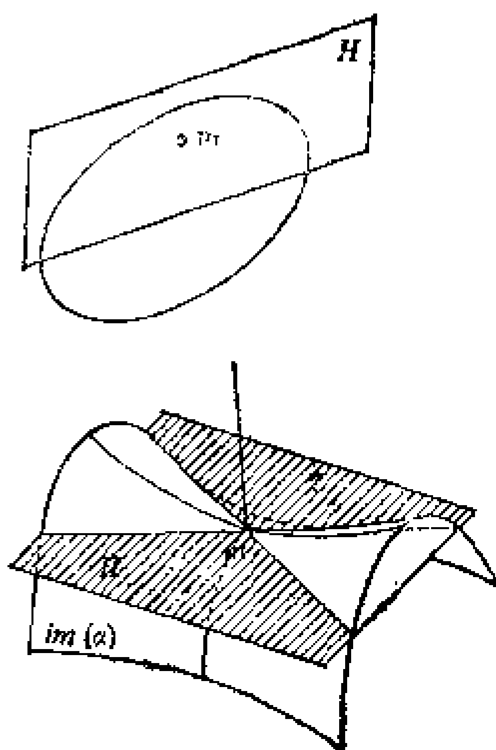


图 14.1.7.2.

正常二次超曲面的象 B. 这个例子的特例是：α 是 $P(E)$ 的正常二次超曲面，m是 $\operatorname{im}(\alpha)$ 的一点. 设H是与α切于m的超平面，我们想要知道α与H的交二次超曲面 $\alpha\cap H$ 是怎样的（见 14.1.3.3 及 14.1.3.5）. 由 13.3.2，$q|_{p^{-1}(H)}$ 的根基是一维的，因此 $\operatorname{im}(\alpha\cap H)$ 是H内一个锥面，其顶点是 m，底是正常二次超曲面.

若 $n=2$，则 $\operatorname{im}(\alpha\cap H)$ 缩为一点 m；若 $n=3$，$\operatorname{im}(\alpha\cap H)$ 或者缩为一点 m，或者由H内过m的两条不同直线构成（这些还能从 14.1.3.2 得到）. 上述两种情形确实出现在图 14.1.5 的类型 (1, 3) 及 (2, 2) 中.

14.2 PQ(E)的子空间；二次超曲面束

从13.1.3.6可知$\dim Q(E)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$（也见 3.7.10）. 因此有

14.2.1

$$\boxed{\dim PQ(E)=\frac{n(n+3)}{2}},$$

作为特例，若 $n=1, 2, 3$，其维数分别是 2, 5, 9.

14.2.2 命题. 设 $m\in P(E)$，则

$$H(m)=\{\alpha\in PQ(E): m\in\operatorname{im}(\alpha)\}$$

是一个超平面.

若记 $m=p(x)$，$\alpha=p(q)$，则条件 $m\in\operatorname{im}(\alpha)$ 等价于 $q(x)=0$，这个关于 q 的条件是线性的又是非平凡的，因为 $x\neq 0$.

14.2.3 推论. 设 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 是 $P(E)$ 的点，则 $\{\alpha\in PQ(E): m_i\in\operatorname{im}(\alpha)\forall i\}$ 是 PQ(E) 的一个子空间，其维数 $\geqslant\dfrac{n(n+3)}{2}-d$.

作为特例，过 $P(E)$ 的 $\dfrac{n(n+3)}{2}$ 个点至少有一个二次超曲面.

14.2.4 例. 过射影平面上 5 个不同点至少有一条圆锥曲线. 在 16.1.4 内将详细说明其唯一性. 第二个例子更有趣：设 $n=3$，

D, D', D'' 是 $P(E)$ 的 3 条直线，则至少存在一个二次曲面 α 使 $\mathrm{im}(\alpha)\supset D\cup D'\cup D''$. 其实在每一条直线上各取 3 个不同点，由 14.2.3 及 14.1.3.4 的结果就可得出上述结论：

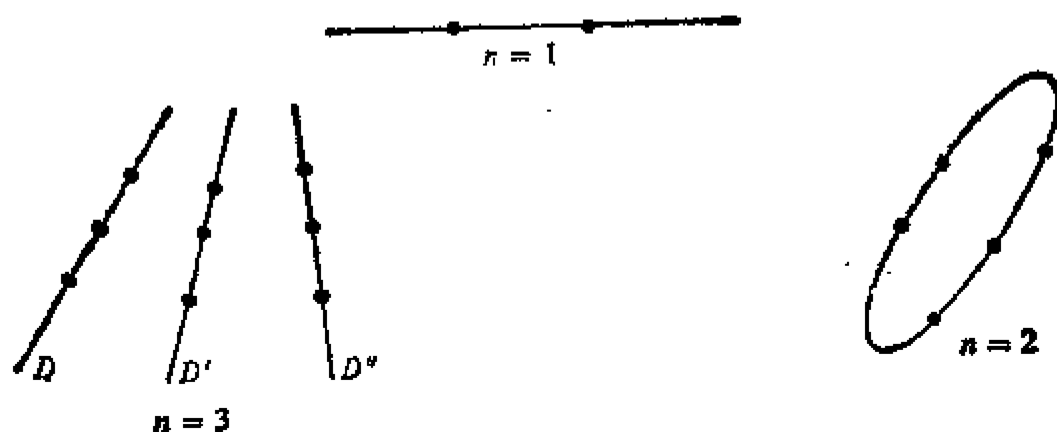


图 14.2.4.

14.2.5 注意. PQ(E) 的超平面并不都是形如 14.2.2 的. 我们将在 14.5.4.6 重新回到这个问题上来.

以下的内容尽管简单，但它们在几何上有很多应用，例如 16.5.3 及 17.5.

14.2.6 定义. 称 PQ(E) 的直线为(二次超曲面)束.

14.2.7 例

14.2.7.1 实际上 (见 4.6.7) 二次超曲面束 $\mathscr{F}$ 由两个不同的二次超曲面 α, α' 所确定: $\mathscr{F}=\langle\alpha, \alpha'\rangle$; 若 $\alpha=p(q)$, $\alpha'=p(q')$, 则 $\{\lambda q+\lambda' q': (\lambda, \lambda')\neq(0, 0)\}$ 是$\mathscr{F}$的二次超曲面的方程的集合.

14.2.7.2 据 14.2.3, 若 $\{m_i\}\left(i=1,\cdots,\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ 是 $P(E)$ 的点，在一般情况下集 $\{\alpha\in \mathrm{PQ}(E): m_i\in \mathrm{im}(\alpha)\forall i\}$ 是一个束. 例如若 $n=2$, 且若 φ, ψ, ξ, η 是直线 $\langle m_1, m_2\rangle$, $\langle m_3, m_4\rangle$, $\langle m_1, m_3\rangle$, $\langle m_2, m_4\rangle$ 的方程(即 E 上线性型), 则过 m_1, m_2, m_3, m_4 的圆锥曲线束$\mathscr{F}$将由方程 $\lambda\varphi\psi+\lambda'\xi\eta$ 所定义(见 13.1.3.3).

14.2.7.3 所谓束 $\mathscr{F}$ 的底是 $P(E)$ 的子集: $\mathscr{F}$ 的底 $=\bigcap_{\alpha\in\mathscr{F}}\mathrm{im}(\alpha)$.

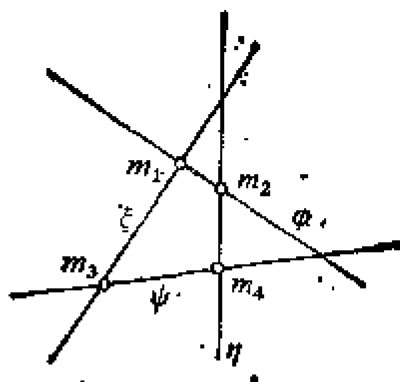


图 14.2.7.

14.2.7.4 根据 14.2.2 和 4.6.12，当束$\mathscr{F}$和 $P(E)$ 的点m给定后，在一般情况下有一个$\mathscr{F}$中的二次超曲面通过 m.

14.2.7.5 为了找出束 $\mathscr{F}$ 中的退化二次超曲面，我们利用 14.1.4.2. 设 q, q' 定义$\mathscr{F}$, $q\longleftrightarrow A, q'\longleftrightarrow A'$. 以 $\lambda A+\lambda' A'$ 为矩阵的方程所对应的二次超曲面是退化的充要条件是 $\det(\lambda A+\lambda' A')=0$. 由于这是两个变量 (λ, λ') 的 $n+1$ 次齐次多项式，故在射影直线 $P(K^2)$ 内至多有 $n+1$ 个不同的根，要不就是上述行列式始终等于0. 这样，或者$\mathscr{F}$的所有二次超曲面都是退化的，或者$\mathscr{F}$包含至多 $n+1$ 个退化二次超曲面. 例如，若K是代数闭域，在一般情况下，$\mathscr{F}$包含 $n+1$ 个退化二次超曲面. $n=2$ 时完整的讨论可见 16.5.

如果束中所有的二次超曲面都退化，则称此束退化.

14.2.8 一维情形

14.2.8.1 命题. 设$\mathscr{F}$是 $D=P(E)$ 的二次超曲面束，其中 $n=\dim P(E)=1$，即D是射影直线. 则$\mathscr{F}$不退化而且必定属于以下两种类型:

(i) 存在 $m_0\in D$ 使$\mathscr{F}=\{\alpha\in PQ(E): \operatorname{im}(\alpha)=\{m_0, m\}, m\in D\}$ (我们记得，当 $n=1$ 时，非空象集确定了 α，参看 14.1.3.2);

(ii) 存在D的对合 f (见 6.7) 使

$\forall\alpha\in\mathscr{F}\ \forall m\in P(E)\cap\operatorname{im}(\alpha): D\cap\operatorname{im}(\alpha)=\{m, f(m)\}$.

反之,对D的任意对合f存在$P(E)$的二次超曲面束$\mathscr{F}$使$\forall\alpha\in\mathscr{F}$ $\forall m\in D\cap\mathrm{im}(\alpha)$:

$$D\cap\mathrm{im}(\alpha)=\{m, f(m)\}.$$

设 $\alpha,\alpha'\in\mathscr{F}$ 都是退化的且 $\alpha\neq\alpha'$, 则根据 14.1.3.2 可写 $\alpha=p(\varphi^2),\alpha'=p(\varphi'^2)$,其中 $\varphi,\varphi'\in E^*$. 于是 $\varphi^2+\varphi'^2$ 是$\mathscr{F}$中一个二次超曲面的方程,而且这个二次超曲面是正常的. 从而$\mathscr{F}$不可能退化.

取 $\alpha\in\mathscr{F}$, α 正常且 $\mathrm{im}(\alpha)\neq\emptyset$, 根据 14.2.7.4, 这样的$\alpha$存在. 取$D$上齐次坐标 (x, y) 使

$$\mathrm{im}(\alpha)=\{p(1,0), p(0,1)\};$$

从而 $2xy$ 是α的一个方程. 设 $ax^2+2bxy+cy^2$ 是 $\alpha'\in\mathscr{F}$, $\alpha'\neq\alpha$ 的一个方程, 我们可假设譬如说 $c\neq 0$. 现在只需讨论 $D\cap\mathrm{im}(\beta)$, $\beta\in\mathscr{F}\backslash\alpha$, 因此也就只需讨论方程

$$ax^2+2bxy+cy^2+\lambda(2xy)=ax^2+2(b+\lambda)xy+cy^2=0,\ \lambda\in K.$$

由于 $c\neq 0$, 故 $(0, 1)$ 不是解,因此我们可找形如 $(1, t)$ 的解,它是以下方程的根:

$$a+2(b+\lambda)t+ct^2=0.$$

这些根满足 $tt'=a/c$, 因而属于D上由 $f(t)=a/ct$ (且 $f(0)=\infty$, $f(\infty)=0$, 见 5.2.4) 所定义的对合 f.

反之,由 6.7.3 的证明可知,在适当的齐次坐标下,任一对合可写成 $f(t)=k/t$, $k\in K^*$. 上面的计算表明所找的束$\mathscr{F}$由两个方程

$$q=2xy \text{ 及 } q'=kx^2+y^2$$

所定义.

14.2.8.2 注. 在第 (ii) 种情形里, 对合的双重点正是束的退化二次超曲面,因而它们的个数是 0 或 2 (见 6.7.2). 在情形 (i) 中,恰有一个退化二次超曲面,其象是 $\{m_0\}$.

14.2.8.3 推论(Desargues 定理). 这里 $\dim E$ 是任意的,$\mathscr{F}$是 $P(E)$ 的二次超曲面束,D是 $P(E)$ 的直线.再假设 $\{\alpha\cap D:\alpha\in\mathscr{F}\}$是$D$的二次超曲面束, 即(见 14.1.3.3) $\forall\alpha\in\mathscr{F}:D\not\subset\mathrm{im}(\alpha)$,

并且

$$D\cap\mathscr{F}\text{的底}=\emptyset,$$

则 $\forall m\in D$ 存在唯一的 $\alpha_m\in\mathscr{F}$ 使得 $m\in\operatorname{im}(\alpha_m)$，并且由 $\operatorname{im}(\alpha_m\cap D)=\{m,f(m)\}$，$m\in D$，所定义的映射 $f:D\circlearrowleft$ 是D的对合。它的双重点是与D相切的（见 14.1.3.5）$\alpha\in\mathscr{F}$ 和 D 的交点．特别是，$\mathscr{F}$ 中有 0 个或 2 个二次超曲面与D相切。

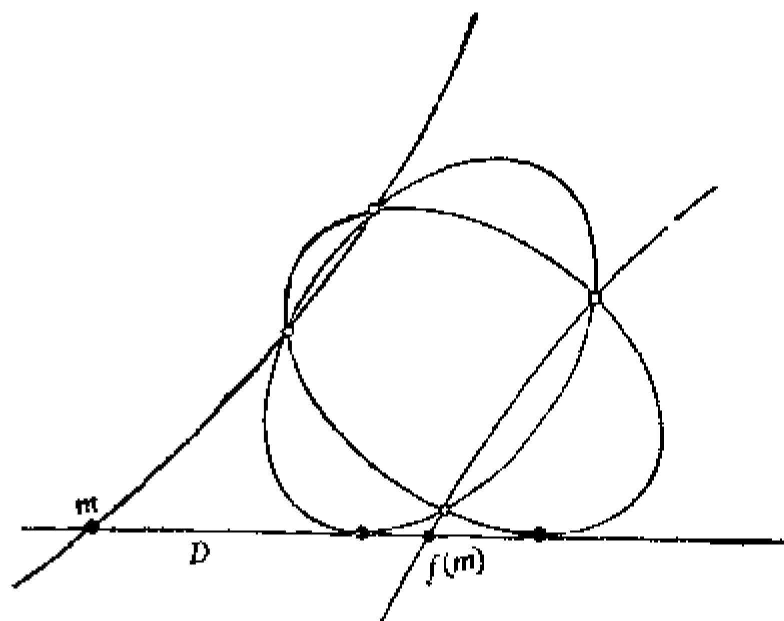


图 .4.2.8.

14.3 二次超曲面的拓扑性质与微分性质（K=R 或 C）

在本节中 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$.

据 4.3 节，射影空间$P(E)$有一个自然拓扑，从而对 $\alpha\in\operatorname{PQ}(E)$ 而言，$\operatorname{im}(\alpha)\subset P(E)$ 有一个拓扑空间结构．我们要研究这个 $\operatorname{im}(\alpha)$ 空间。

14.3.1 命题．二次超曲面的任一非空象集都是紧的．当 $n\geqslant 2$ 时，它还是弧连通的．

紧性的证明与 4.3.3.2 中射影空间的紧性的证明一样．使用这一节的记号，若 q 是 $\alpha\in\operatorname{PQ}(E)$ 的方程，则 $\operatorname{im}(\alpha)=p(q^{-1}(0)\backslash 0)=p(q^{-1}(0)\cap S(E))$．由于$S(E)$是紧的，$q$ 连续，因此

$q^{-1}(0)\cap S(E)$ 是紧的。又因 $P(E)$ 是可分的，故象 $p(q^{-1}(0)\cap S(E))$ 是紧的(见 4.3.3)。

对 $n=1$ 的情形，14.1.3.2 表明 $\mathrm{im}(\alpha)$ 可能不连通。下面假设 $n\geqslant 2$，我们可限于考察 α 为正常的情形，因为据 14.1.7.1，若 A 和 B 弧连通，则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 也是弧连通，既然射影直线是弧连通的(见 4.3.3)。若 $K=\mathbf{R}$，当 α 为正常且 $\mathrm{im}(\alpha)\neq\emptyset$ 时，$\mathrm{im}(\alpha)$ 的弧连通性可从14.3.3得到。若 $K=\mathbf{C}$，$m, n\in\mathrm{im}(\alpha)$，$m\neq n$，我们将考虑含 m 及 n 的任意射影平面 S。若 $\alpha\cap S$ 是正常的，则由 14.3.6，二次超曲面 $\alpha\cap S$ 是弧连通的，要不然从它由两条直线构成也可看出它是连通的(见 14.1.7.2 及 14.1.3.2)。

14.3.2 实正常的情形. 由于 14.1.7.1，二次超曲面的拓扑可归结为正常二次超曲面的拓扑。令人惊讶的是实数的情形 ($K=\mathbf{R}$) 比复数的情形更简单。据 13.4.2，可假设 q 的一个方程是 $\sum_{i=1}^{r} x_i^2-\sum_{i=r+1}^{r+s=n+1} x_i^2$，把由这个方程定义的二次超曲面在 $P^n(\mathbf{R})$ 里的象记为 $C(r, s)$，则有：

14.3.3 命题. 拓扑空间 $C(r, s)$ 同胚于商集 $(S^{r-1}\times S^{s-1})/\mathbf{Z}_2$，这是球面的积 $S^{r-1}\times S^{s-1}$ 关于 $O(r+s)$ 中由 $\pm\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^{r+s}}$ 所构成的子群的商集。特别，$C(n, 1)$同胚于 S^{n-1}，$C(2, 2)$ 同胚于$S^1\times S^1$。

只要把 $\mathbf{R}^{r+s}=\mathbf{R}^{n+1}$ 看作欧氏空间的乘积欧氏空间 $\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^s$ 即可。这样，α 的方程可简写成 $q(x, y)=\|x\|^2-\|y\|^2$，$x\in\mathbf{R}^r$，$y\in\mathbf{R}^s$。把 4.3.3.2 的技巧应用于 14.3.1，即有

$$\mathrm{im}(\alpha)=p(\{(x, y):\|x\|^2-\|y\|^2=0 \text{ 及 } \|x\|^2+\|y\|^2=1\}).$$

但后一个集合就是 $\{(x, y):\|x\|=\|y\|=1/\sqrt{2}\}$，它是 $\mathbf{R}^r$ 与 $\mathbf{R}^s$ 中半径为 $1/\sqrt{2}$ 的球面的乘积。剩下只要考察射影 $p:\mathbf{R}^{r+s}\to P^{r+s-1}(\mathbf{R})=P(\mathbf{R}^{r+s})$ 的作用效果。若 $p(x, y)=p(x', y')$，则 $x'=kx$，$y'=ky$，由于

$$\|x'\|=\|x\|=\|y'\|=\|y\|(=1/\sqrt{2}),$$

必须有 $k=\pm 1$。

若 $s=1$，则球面 S^{r-1} 由两个不同的点构成，设这两个点为 a, b，则射影的限制映射 $p: S^{r-1}\times\{a\}\to p(S^{r-1}\times S^{r-1})=\mathrm{im}(\alpha)$ 是双射，因而是同胚。

若 $r-s=2$，14.4.2 中证明 $\mathrm{im}(\alpha)$ 同胚于两条射影直线的积，由 4.3.6 可知它就是这里的 $S^1\times S^1$。

14.3.4 例：实数情形. 若 $n=2$，使象非空的只有一种类型，它同胚于圆周 S^1（图 14.1.5）。这个同胚也可从 16.2.4 得到。

若 $n=3$，有两种类型，分别同胚于 S^2 或环面 $S^1\times S^1$. 第一种类型在图 14.1.5 上可以看得很清楚. 为看出第二种类型要借助于 14.4.2；因为一个平面总是与 $C(2, 2)$ 相交的，所以根本不可能在仿射空间里把 $C(2, 2)$ 画出来. 请注意同一族直线交错的情形，参看 18.8.6 及图 14.3.4.

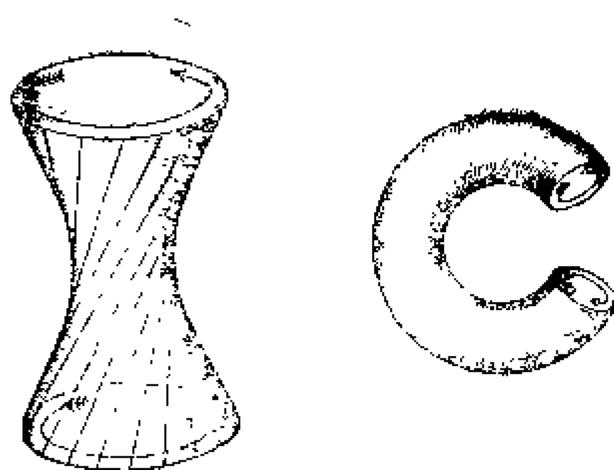


图 14.3.4.

$C(4, 4)\subset P^7(\mathbf{R})$ 的情形是有趣的。根据 8.9.8，我们可得到它与 $\mathbf{R}^4$ 的旋转群 $O^+(4)$ 的一个同胚映射.

14.3.5 复数情形. 当 $K=\mathbf{C}$ 时，据 13.4.2，正常的二次超曲面只有一种拓扑类型，即由方程 $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$ 在 $P^n(\mathbf{C})$ 内所定义的二次超曲面的类型. 把这个二次超曲面的象记为 $C(n)$. 这里不存在类似于 14.3.3 那样把 $C(n)$ 的拓扑归结为已知空间的拓扑所得到的结果. 我们只有以下的：

14.3.6 命题. $C(2)$ 同胚于 S^2，$C(3)$ 同胚于 $S^2 \times S^2$.

第一种情形可从 16.2.4 得到，第二种情形从 14.4.2 得到.

14.3.7 注. 读者猜想得到，数学家已经讨论了 $C(n)$ 的拓扑，这样的讨论已超出本书的范围. 第一篇历史性文献是 [CE1]. 其实容易看出，$C(n)$ 同胚于 $P^n(\mathbf{R})$ 的有向直线所成的实 Grassmann 流形，它又可等同于齐次空间

$$O^+(n+1)/O^+(n-1) \times O^+(2) \text{ (见8.2.8)}$$

但 Grassmann 流形的拓扑已被研究得很充分，特别是它引起了"示性类"的概念，可参看 [HU]，第 18 章.

对 $C(4)$ 和 $C(5)$ 的情形可作特殊的解释，这起因于 $O(5)$ 和 $O(6)$ 的典型群同构，参看 [PO]，第 266 页. 也见 20.5.7.

关于微分几何方面，有以下命题.

14.3.8 命题. 设 α 是 $P(E)$ 的正常二次超曲面，则 α 的象 $C = \operatorname{im}(\alpha)$ 是 $P(E)$ 的 C^∞ 子流形，当 $K = \mathbf{R}$ 时，余维数是 1，当 $K = \mathbf{C}$ 时，余维数是 2，此外在任一点 $m \in C$，与 C 切于 m 的切空间 $T_m C$ 自然地等同于商向量空间 $x^\perp / Kx$，其中 $p(x) = m$（也见 14.1.3.5）.

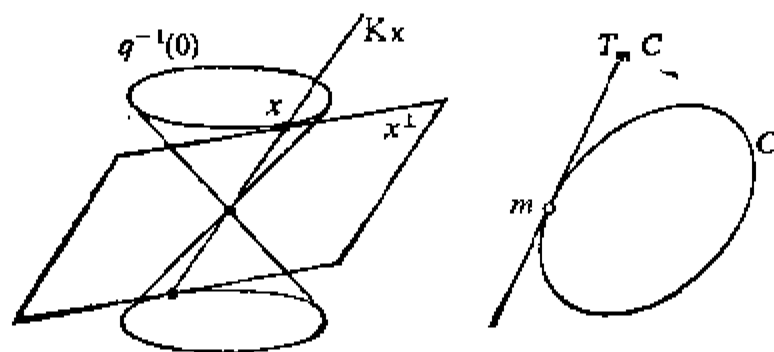


图 14.3.8.

我们利用 4.2.6. 由于 4.2.4.2 中的坐标图是 C^∞ 的，故可讨论如下. 如证 C 是在 $m = p(x) \in C$ 的邻域内的 C^∞ 子流形，我们选取 4.2.4.2 型的一个坐标图：

$$(v_1, \cdots, v_n) \longmapsto p(v_1, \cdots, v_n, 1)$$

使得 $m = p(0, \cdots, 0, 1)$. 方程 C 转移到 K^n 内后成为

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}v_iv_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}v_i + a_{n+1,n+1} = 0$$

（见 14.1.4.1），而且导数 $f'(0,\cdots,0)$ 等于

$$\frac{\partial f}{\partial v_i}(0,\cdots,0) = 2a_{i,n+1}.$$

因 $\det A \neq 0$（见 14.1.4.2），这些导数不全为零，因此

$$f'(0,\cdots,0) \neq 0,$$

故 C 是一个 C^∞ 子流形（甚至是实或复的解析流形，见 4.2.6）。至于切空间 T_mC，它转移到 K^n 内后由 $(f'(0,\cdots,0))^{-1}(0)$ 给出，从而由方程 $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}y_i = 0$ 给出。但 $x^\perp$ 由 $P(x,y)=0$ 给出，即 $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}y_i + a_{n+1,n+1}y_{n+1} = 0$，当我们置 $y_{n+1}=0$ 时，这个方程化成前一方程.而令 $y_{n+1}=0$ 又恰好对应于作商空间 $x^\perp/Kx$（也见 13.1.2）。

若 α 不是正常的，则要利用 14.1.7.1，也见 14.8.5. 关于这里用到的微分几何，可参考［B-G］，特别是其中的 2.5.7 及 2.6.15 两节。

14.4 当 n=4 及 q 为中性时二次曲面的性质

这里我们研究 $(E,q)=\mathrm{Art}_4$ 的特殊情形，但 K 任意. 首先，只要把 13.7.11 的结果翻译到 $P(E)$ 内即可，我们还记得那里有一个完全初等的证明 13.7.11.2。

14.4.1 命题. 设 $C=\mathrm{im}(\alpha)$ 是 $P(E)$ 的二次曲面 α 的象集，其中 $\dim P(E)=3$，α 的一个方程 q 是中性型（见 13.1.4.3），则 C 包含两族直线 Ξ，Θ，它们满足：

(i) $\forall m\in C$ 存在唯一的 $X\in\Xi$，$T\in\Theta$，使得 $m\in X$ 及 $m\in T$；

(ii) $\forall X\in\Xi\,\forall T\in\Theta$：$X\cap T$ 由 C 中的一点构成；

(iii) $\forall X,\ X'\in\Xi\,\forall T,\ T'\in\Theta$；$X\cap X'=\emptyset$ 或 $X=X'$，

$T \cap T' = \emptyset$ 或 $T = T'$.

这两个直线族称为 α 的两个母线族.

14.4.2 推论. 存在自然双射

$$\varphi: C \to P^1(K) \times P^1(K).$$

此外若 $K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 这些 φ 都是同胚.

固定 $X_0 \in \Xi$, $T_0 \in \Theta$, 且置 $\varphi(m) = (T(m) \cap X_0, X(m) \cap T_0)$, 这里的 $X(m)$ (相应地: $T(m)$) 是 Ξ(相应地: Θ) 中过 $m \in C$ 的唯一母线. 由 14.4.1 (i) 可知 φ 是确定的, 而且 14.4.1 (ii) 表明 φ 是从 C 到 $X_0 \times T_0$ 上的双射, 后者同构于 $P^1(K) \times P^1(K)$. 剩下要证当 $K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时,这是同胚. 由于这里出现的都是紧集,故只需证 φ 的连续性即可, 而连续性很易从 13.7.11.2 的分式得出.

反之, 在任何三维射影空间内可以几何地构造有中性方程的二次曲面的象集, 这可有三种方法. 以下是第一种.

14.4.3 命题. 设 $P(E)$ 是三维的, D, D', D'' 是 $P(E)$ 中彼此都没有公共点的三条直线, 则存在同时与 D, D', D'' 相交的直线, 这些直线的并集就是具有中性方程的二次曲面的象集.

实际上由 14.2.4, 存在二次曲面 α, 其象集 $C = \operatorname{im}(\alpha)$ 包含 $D \cup D' \cup D''$. 首先验证 α 是正常的. 我们利用归谬法. 设 $m \in p(\operatorname{rad}(q))$, 并设 $m \notin D$, 则根据 14.1.7.1, 象集 C 包含整个平面 $\langle m, D\rangle$. 但这时与 D', D'' 都相交的直线必与 $\langle m, D\rangle$ 相遇, 从而与 C 有三个公共点,所以整条直线都在 C 内(见 14.1.3.4). 但与 D', D'' 都相交的直线充满了整个 $P(E)$ 导致矛盾. 现在由于 q 非退化且 C 包含一条直线, 据 13.3.4.2 可知 q 是中性的.

为了发现另两种方法,首先我们注意到:

14.4.4 引理. 设 C 如 14.4.1 所述, $(X_i)_{i=1,2,3,4} \subset \Xi$, 则四个点 $T \cap X_i$ 的交比 $[T \cap X_i]$ 与 $T \in \Theta$ 无关. 我们称之为 (X_i) 的交比,记为 $[X_i]$.

取定 $T_0 \in \Theta$ 且设 $P_i = \langle X_i, T_0\rangle$ 是由 X_i 及 T_0 生成的平面. 但对任一 $T \in \Theta$, 有 $P_i \cap T = X_i \cap T$, 从而据 6.5.2 有

$[X_i \cap T] = [P_i]$，这个交比确与 T 无关.

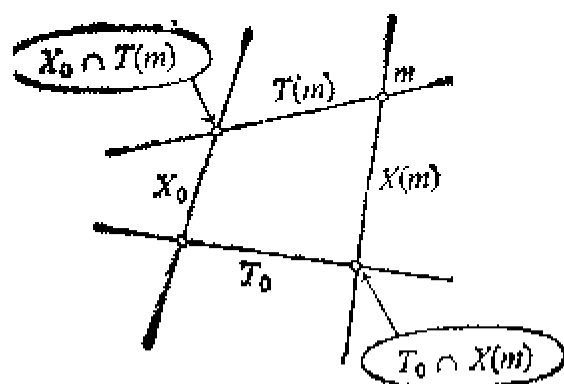


图14.4.2.

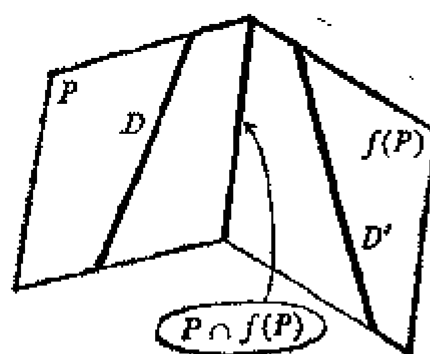


图14.4.3.

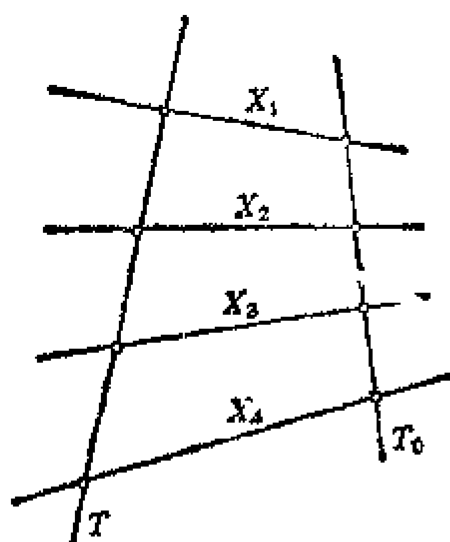


图 14.4.4.

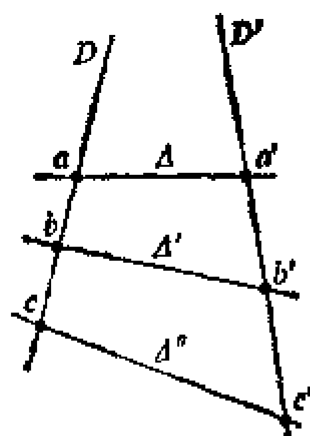


图14.4.5.

14.4.5 推论. 设 D, D' 是 $P(E)$ 的两条直线(这里 $P(E)$ 是三维的) 使得 $D \cap D' = \emptyset$ 且 $f \in \mathrm{Isom}(D;D')$ 是 D 与 D' 间的单应，则 $\{\langle m, f(m)\rangle : m \in D\}$ 是具有中性方程的二次曲面的象. 对偶地，设 f 是在过 D 的平面束 $\mathscr{F}$ 与过 D' 的平面束间的单应，则 $\{P \cap f(P) ; P \in \mathscr{F}\}$ 是具有中性方程的二次曲面的象.

对偶的断言可从第一个断言及 6.5.2 得出. 为证第一个断言可取定三个点 a, b, $c \in D$，其象为 $a' = f(b)$, $b' = f(b)$, $c' = f(c) \in D'$. 只需把 14.4.4 应用于过三条直线 $\Delta = \langle a, a'\rangle$, $\Delta' = \langle b, b'\rangle$, $\Delta'' = \langle c, c'\rangle$ 的二次曲面即可(见 14.4.3 及 6.1.5).

14.4.6 例. 设 D, D' 是三维欧氏仿射空间 X 中的两条直线，$D \cap D' = \emptyset$，且两个点 $m(t)$, $m'(t)$ 在 D, D' 上作匀速运动，

则当 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，仿射直线

$$\langle m(t),\ m'(t)\rangle$$

描出了 X 的一个仿射二次曲面，这是一个双曲抛物面(见 15.3.3.3).

这个结果新近获得了重要的实际意义：建筑师们很容易实现用预应力混凝土构成的拱顶，但有一个条件，即拱顶必须由直线形成(这相当于应力索)．当然，最简单的方法是在直线状的支撑物上每隔相等距离做一个受力点，再把这些钢索张紧在支撑点间．参看图 14.4.7.1 的说明及［JE］，178—197 页．在射影空间的情形不能完全画出 C，这是 4.3.9.1 的推论．

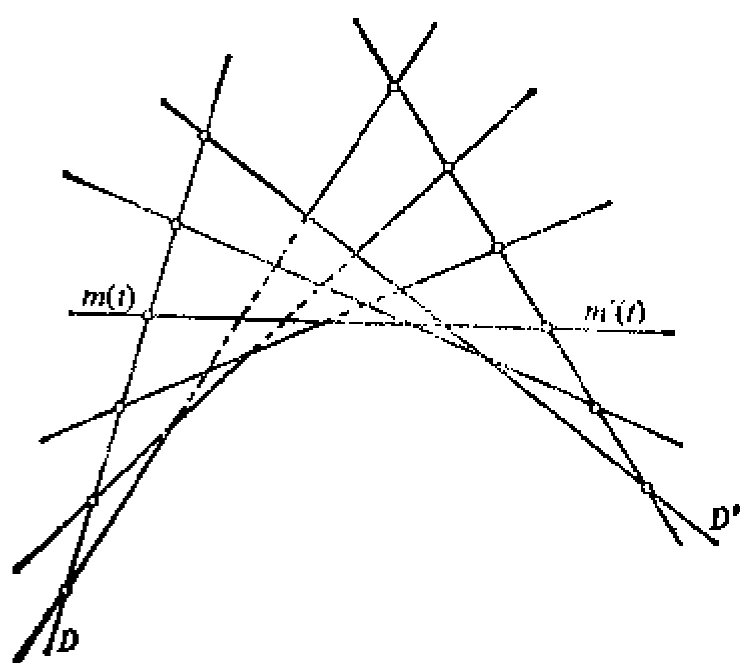


图 14.4.6.1.

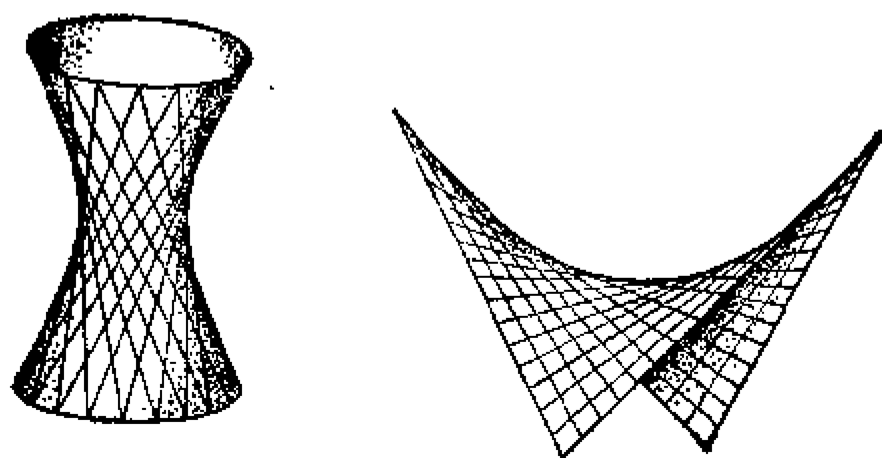


图 14.4.6.2.

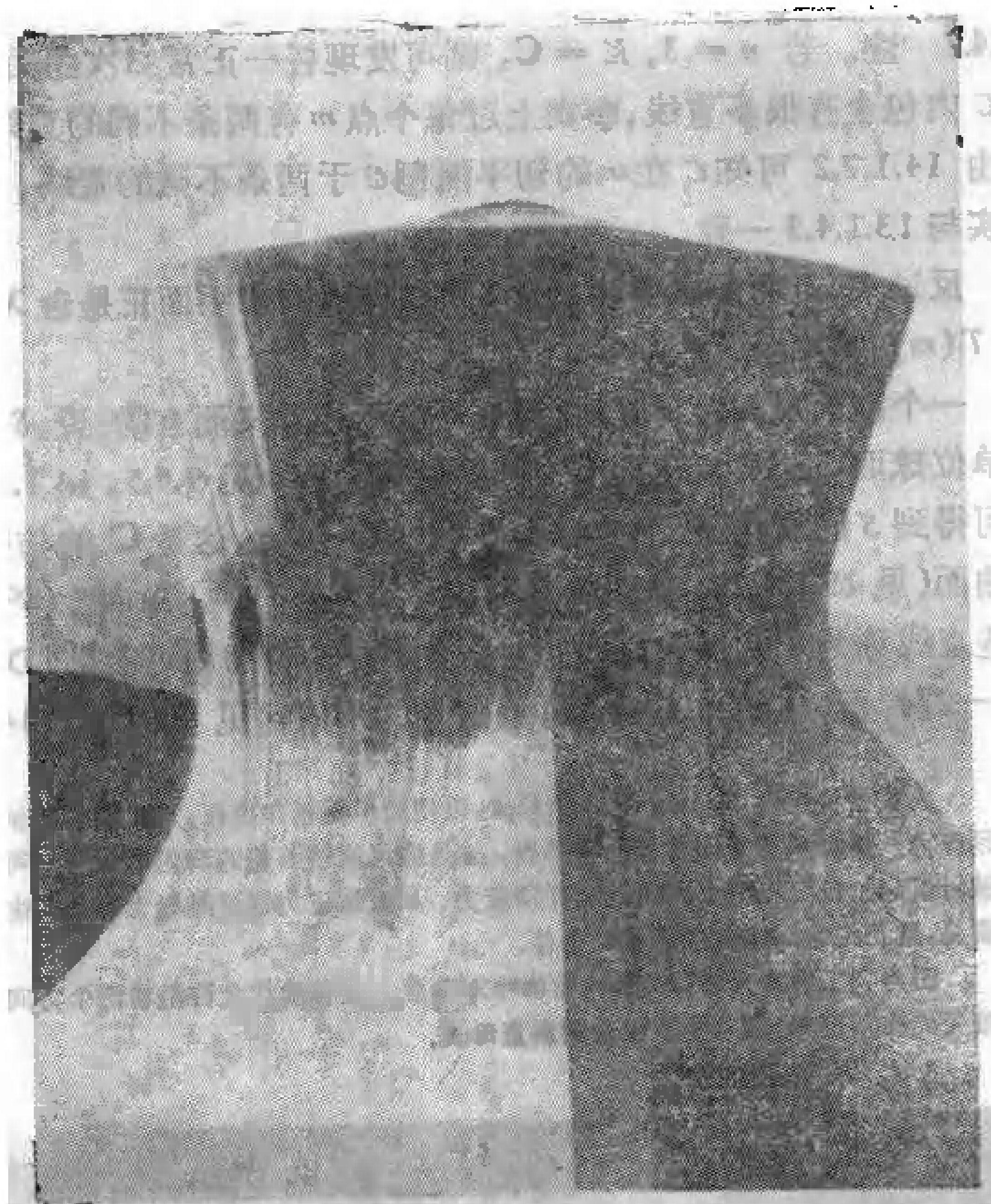


图 14.4.7.2.

14.5 关于正常二次超曲面的对偶：配极变换

在本节中除非另外指明，α 总是正常二次超曲面，q 是 α 的一个方程，其极型是P. 若 E 已取定一个基，则 A 是 q 关于这个基的矩阵，且$C=\operatorname{im}(\alpha)$.

14.5.1 定义. 由 13.2.1，α 通过 q 确定一个同构 $\varphi: E\to E^*$，从

所导出射影空间的同构 $\phi: P(E) \to P(E^*)$. 按照 4.1.3.5，我们可把 $P(E^*)$ 等同于 $P(E)$ 的超平面集 $\mathscr{H}(E)$. 根据 4.5.4 及 14.1.1，映射 ϕ 仅依赖于 α（与它的方程 q 无关），故称 ϕ 为关于正常二次超曲面 α 的配极变换. 若 $m \in P(E)$，则称 $\phi(m) \in \mathscr{H}(E)$ 为 m 的配极超平面，记为 $m^{\perp}$. 若 $n = 2$ 则称为 m 的配极直线.

更一般地，$P(x, y) = 0$ 仅与 $m = p(x)$，$n = p(y)$ 有关（与 x，y 无关），也仅与 α 有关（与 P 无关），则称 m 和 n 关于 α 共轭，记为 $m \perp n$. 这个关系是对称的. 对任一子集 $S \subset P(E)$，置 $S^{\perp} = \{n \in P(E): m \perp n \forall m \in S\}$. 我们总是有 $\langle S\rangle^{\perp} = S^{\perp}$，且 $S^{\perp}$ 总是一个子空间. 对于子空间 S，T，有 $S^{\perp\perp} = S$，$\dim S + \dim S^{\perp} = \dim P(E) - 1$，

$$(S \cap T)^{\perp} = \langle S^{\perp} \cup T^{\perp}\rangle,\ \langle S \cup T\rangle^{\perp} = S^{\perp} \cap T^{\perp}.$$

$S^{\perp}$ 称为 S 的配极子空间. 当 S 是超平面时，点 $S^{\perp}$ 称为 S 的极. 上述内容不过是把 13.3.2 翻译到 $P(E)$ 内. 我们也说 S 和 $S^{\perp}$ 是（关于 α）共轭的.

14.5.2 例

14.5.2.0 若 E 是欧氏向量空间，$\|\cdot\|^2$ 是 α 的方程，则关于 α 的配极变换就是 E 内通常的正交性. 这是配极变换很自然但 $\mathrm{im}(\alpha) = \emptyset$ 的一个典型情形.

14.5.2.1 $m \in \mathrm{im}(\alpha)$ 的超切平面是 $m^{\perp}$（见 14.1.3.5）.

14.5.2.2 若 $m \in n^{\perp}$，则 $n \in m^{\perp}$，因为"m, n 共轭"的关系.

14.5.2.3 若 $D = \langle m, n\rangle$ 是一条直线，$m \neq n$，则 $D^{\perp} = m^{\perp} \cap n^{\perp}$.

14.5.2.4 **遗传性**. 设 T 是一个子空间，使 $\alpha \cap T$ 仍是正常的（见 14.1.3.3），则若 $m \perp n$（关于 α）且 $m, n \in T$，我们关于 $\alpha \cap T$ 仍有 $m \perp n$.

14.5.2.5 **一维情形**. 设 D 是射影直线，α 是 D 的正常二次超曲面，而且 α 的象集非空；根据 14.1.3.2，它的象由 2 个点 a，b 构成，则（见 6.4.1）：

$$m \perp n \Longleftrightarrow [a, b, m, n] = -1.$$

为了看出这一点，我们可在D上取一个齐次坐标 (x, y) 使得α的一个方程是 $q = 2xy$ (见 14.2.8.1). 则(见 13.1.3.6): $(x, y)\perp(x', y') \Longleftrightarrow xy' + x'y = 0$; 由于 $a = p((1,0))$, $b = p((0, 1))$, 从 6.2.3 即可得断言.

14.5.2.6 应用 14.5.2.4 及 14.5.2.5 即可看到若直线 $\langle m, n\rangle$ 与C交于 a, b, 则 $m\perp n$ 等价于 $[a, b, m, n] = -1$. 再应用 6.4.4,我们可由此导出m的配极平面$m^{\perp}$的几何作法,见图 14.5.2, 这里当然假设C包含足够多个点.

14.5.2.7 α 的过m的切线与 $\mathrm{im}(\alpha)$ 的接触点是 $\mathrm{im}(\alpha)\cap m^{\perp}$ 的点(图 14.5.2).

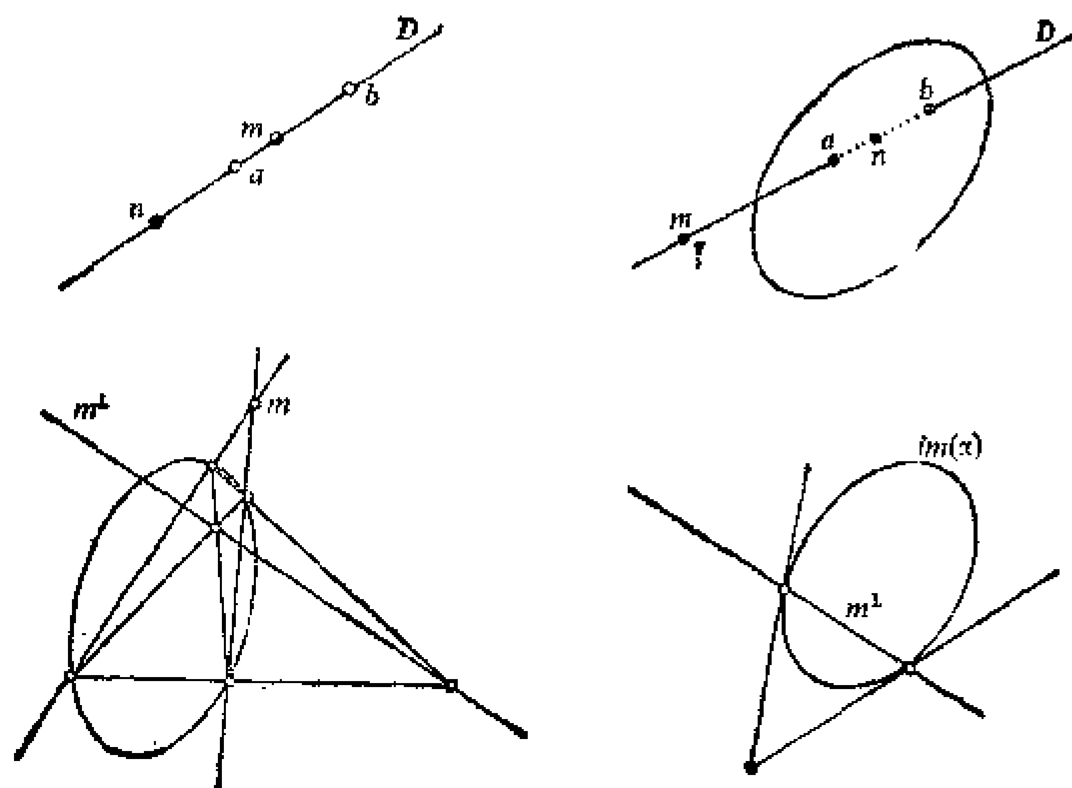


图 14.5.2.

14.5.3 显式计算. 根据 13.1.2 及 13.1.3.6, $p(x) = m$ 及 $p(y) = n$ 共轭的充要条件是

$$ {}^{t}XAY = 0, \text{或} \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j = 0, \text{或} \sum_{i} \frac{\partial q}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{n+1})y_i = 0. $$

例如 x 的配极超平面是 $\sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j = 0$。为了找出超平面 $\sum_i \xi_i y_i = 0$ 的极，必须计算A的逆阵。据 13.2.0，极 x 使得 $\varphi(x) = \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n+1})$，因此

$$x = \varphi^{-1}(\xi),$$

即

$$x \longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_{n+1} \end{pmatrix}.$$

我们也可解 $n+1$ 个线性方程的齐次方程组，参看 15.5.5.2。

另一类计算是求 α 的以 m 为顶点的切锥面，它被定义为过 m 的 α 的切线的并集。记 $m = p(x_0)$，则当 α 限制于直线 $D = \langle x_0, x\rangle$ 上为退化时，x 属于这个锥面（参看 14.1.3.5）。但关于 x_0 和 x 构成的基，$\alpha \cap D$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} q(x_0) & P(x_0, x) \\ P(x_0, x) & q(x) \end{pmatrix}$，因此 14.1.4.2 表明我们的锥面方程是 $q(x_0)q(x) - (P(x_0, x))^2 = 0$。当 $n = 2$ 时即得到直线的集合。需要时可参看图 14.7.4 或 14.5.2.7 节。

14.5.4 自配极单形，调和外切于一个二次超曲面的二次超曲面.

14.5.4.1 $P(E)$ 的一个单形 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 是 $n+1$ 个独立的点的集合（见 4.6.6），若 m_i 不全独立的，则此单形称为退化的。若

$$m_i \perp m_j \forall i \neq j,$$

则称此单形关于正常二次超曲面 α 是自配极的。若这确实是一个单形，则 m_i 的配极是超平面

$$\langle m_1, \cdots, \hat{m}_i, \cdots, m_{n+1}\rangle,$$

这对任一 i 成立。单形 $\{m_i = p(x_i)\}$ 是自配极的等价于 $\{x_i\}$ 是 (E, q) 的正交基。因此关于 α 的自配极单形总是存在的（见 13.4.1）。与此相反，若 α，α' 是两个二次超曲面，13.5 表明同时关于 α 和 α' 为自配极的单形并不总是存在的。$n = 2$ 时的全面的讨论可见 16.4.10。

14.5.4.2 现在我们要与两个正常二次超曲面 α, α' 打交道. 设 q, q' 是 α, α' 的方程, $\varphi, \varphi': E \to E^*$ 是相关联的同构(见 14.5.1). 很自然地可以把这对二次超曲面跟同构(见 13.5.1) $f = \varphi^{-1} \circ \varphi' \in \mathrm{Isom}(E)$ 联系起来,特别是可以考虑它的不变量: 迹,行列式等等. 在关于 K^* 作商空间后仍然有意义的是 f 的迹 $= 0$(对除去行列式以外的许多其它不变量也是如此).这个条件可简单地用几何语言解释为:

14.5.4.3 命题. 若存在关于 α 的一个自配极单形 $\{m_i\}$, 它又是内接于 α'' 的,即 $m_i \in \mathrm{im}(\alpha') \forall i$, 则 f 的迹 $= 0$. 反之,若 K 是代数闭域且 f 的迹 $= 0$,则对任意的 $m \in \mathrm{im}(\alpha') \backslash \mathrm{im}(\alpha)$, 存在关于 α 的自配极单形 $\{m_i\}$, 它内接于 α' 且使 $m = m_1$.

必要性的证明是显然的. 若 $m_i = p(e_i)$, 则 $q = \sum_i a_{ii} x_i^2$ (见 14.5.4.1) 若, $q' = \sum_{i,j} a'_{ij} x_i x_j$, 则条件 $q'(e_i) = 0$ 导致 $a'_{ii} = 0 \forall i$. 从而

$$f \text{ 的迹} = \sum_i a'_{ii} a_{ii}^{-1} = 0 \text{ (见 13.2.0).}$$

再考虑充分性,我们对维数作递推. 首先设 $n = 1$, 我们选取一个基 $\{e_1, e_2\}$ 使得 $m = p(e_1)$ 是被考虑的 $\mathrm{im}(\alpha')$ 内的点, $n = p(e_2)$ 是它关于 α 的共轭,则 q 是形如 $ax^2 + cy^2$ 的,q' 是形如 $2b'xy + c'y^2$ 的.关于迹的条件是 $c^{-1}c' = 0$, 这就是说 $c' = 0$, $q' = 2b'xy$, 从而

$$n = p(e_2) \in \mathrm{im}(\alpha').$$

再假设对 $n-1$ 结论正确,设 $m \in \mathrm{im}(\alpha')$, $H = m^\perp$ 是它关于 α 的配极超平面. 记 $q = \sum_i a_{ii} x_i^2$, 其中 $m = p(e_1)$, $q' = \sum_{i,j} a'_{ij} x_i x_j$, 于是 $a_{11} = 0$, H 的方程是 $x_1 = 0$. 对于二次超曲面 $\alpha \cap H$, $\alpha' \cap H$ (它们是正常的,因 $m \notin \mathrm{im}(\alpha)$), 与之相关联的同构的迹为

$$\sum_{i=2}^{n+1} a_{ii}^{-1} a'_{ii} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ii}^{-1} a'_{ii} = 0;$$

由递推假设，在H内存在 $\{m_i\}_{i=2,\cdots,n+1}$，使得 $m_i \perp m_j \forall_{i\neq j}$ 关于α成立且 $m_i \in \operatorname{im}(\alpha')\forall i$. 并集

$$\{m\} \cup \{m_i\}_{i=2,\cdots,n+1}$$

符合命题要求.

14.5.4.4 注. 跟 10.10.3 及 16.6 相似，14.5.4.3 也是一种两者择一的命题：给出两个二次超曲面 α, α', 则或者不存在内接于 α' 的单形使它关于α是自配极的；或者这样的单形有无限多个（至少当K是代数闭域时）。

当 f 的迹 $=0$ 时，称 α' 调和外切于 α.

关于两个二次型相关联的不变量的另一种度量解释，见 15.6.4.

14.5.4.5 例. 设E是三维欧氏向量空间，$q' \in Q(E)$ 非退化，且象 $(q')^{-1}(0) \neq 0$, 此时这个象是E内以0为顶点的锥面（图 14.5.4). 置 $q=\|\cdot\|^2$, 则 $P(E)$ 中内接于 $\alpha'=p(q')$ 并且关于 $\alpha=p(q)$ 为自配极的单形意味着(见 14.5.2.0) 锥面中两两正交的三条直线. 由 14.5.4.3 的证明可看出，要保证存在这样的直线，必须在

$$q'=ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy$$

中有 $a+a'+a''=0$. 反之，若 $a+a'+a''=0$, 则对锥面中任意直线D存在锥面的直线 D', D'', 使得 $D\perp D'$, $D'\perp D''$, $D''\perp D$, 也请参见14.8.9.

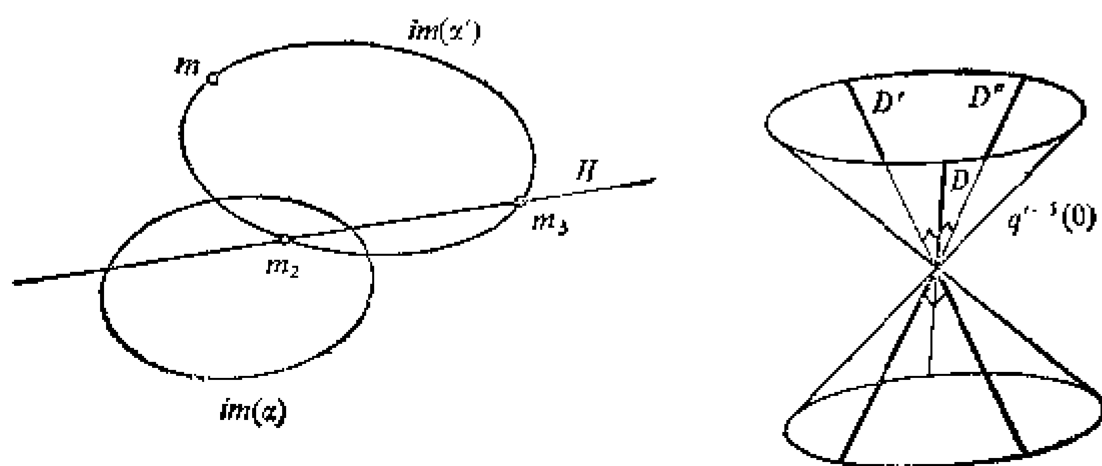


图 14.5.4.

14.5.4.6 PQ(E) 的超平面. 现在我们可以至少就一般的情形来答 14.2.5 提出的问题: PQ (E) 的超平面是怎样的?设 E 有一个任意的基,由 13.1.3.6,PQ (E)的一个超平面可写成 $\sum_{i\leqslant j} a_{ij}\lambda_{ij}=0$, 这里 λ_{ij} 是K的元素. 记 Λ 为元素是 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$ 的矩阵. 条件 $\sum_{i\leqslant j} a_{ij}\lambda_{ij}=0$ 等价于 ($A\Lambda$) 的迹 $=0$.若这些 λ_{ij} 使 $\det\Lambda\neq 0$, 则我们可写成 $A(\Lambda^{-1})^{-1}$ 的迹 $=0$, 从而所考虑的超平面可几何地定义为跟一个方程由 Λ^{-1} 给出的二次超曲面调和外切的二次超曲面全体的集合. 参见 14.8.8 及 14.8.10.

14.5.5 对合对射. 与正常二次超曲面相关联的配极变换 $\phi: P(E)\to \mathscr{H}(E)$ 有许多几何应用,我们以后将经常遇到. 一个常被用到的性质是 14.5.2.2: 若 $n\in\phi(m)$, 则 $m\in\phi(n)$. 因此很自然的想到要寻找满足 14.5.1 中某些性质, 尤其是性质 14.5.2.2 的映射 $f: P(E)\to\mathscr{H}(E)$. 完整的解答将在 14.8.12 中列出,或参看 [FL], 第 270 页. 我们这里限于一种简单的情形: $f: P(E)\to \mathscr{H}(E)$ 是形如 $f=g$ 的,其中 $g\in \mathrm{Isom}(E;E^*)$ (见 4.5). 对 $x\in E$, 相应的正交子空间是 $\{y\in E: g(x)(y)=0\}$. 因此我们要找出使

$$\forall x\forall y: g(x)(y)=0\Rightarrow g(y)(x)=0$$

的 $g\in\mathrm{Isom}(E;E^*)$. 为此,引入双线性型(不必是对称的) $P(x, y)=g(x)(y)$ 将是方便的. 我们知道, 对 $x\in E\backslash 0$, 线性型 $y\longmapsto P(x, y)$ 及 $y\longmapsto P(y, x)$ 有相同的核, 因此它们成比例. 即 $\exists k(x)\in K^*: P(x, y)=k(x)P(y, x)$. 利用与 8.8.5.1 的证明相同的论证, 可见 $k(x)$ 与 x 无关: $P(x, y)=kP(y, x)\forall x, y\in E$($k$ 是 K^* 内元素). 于是 $P(x,y)=k^2P(x,y)$. 由于 g 是同构,存在 $x, y\in E$ 使 $P(x, y)\neq 0$, 从而 $k=\pm 1$. $k=1$ 的情形就是关于极型P 的正常二次超曲面的配极变换. $k=-1$ 的情形是新的. 根据交错型的约化理论,此时 E 必须是偶数维的.它引出了令人感兴趣的几何现象并且立即解释了 4.9.12 中遇到的 Möbius 四面体的奇迹. 详情可见 14.8.12, [FL], 第 270 页.

14.5.6 退化情形. 当 α 不再正常时，总能利用 $\varphi: E \to E^*$ 定义 $m^\perp$，即对 $m = p(x)$，定义 $m^\perp = \{p(y): P(x, y) = 0\}$；不过当 $x \in \operatorname{rad}(q)$ 时，$m^\perp$ 将是整个 $P(q)$，而不再是超平面. 此外可能有 $m^\perp = n^\perp$ 但 $m \neq n$. 为叙述简便起见，我们不讨论后一种情况的对偶性，但读者应把它作为练习加以讨论，因为很自然地会遇到这种情况. 实际上在二次超曲面束中往往有退化的二次超曲面. 请参见 16.4.10 中的一个例子.

14.6 对偶性：切面二次超曲面及切面方程

14.6.1 设 α 是 $P(E)$ 的正常二次超曲面，观察 α 在 $P(E^*) = \mathscr{H}(E)$ 内超切平面的集 $\{m^\perp: m \in \operatorname{im}(\alpha)\}$（见 14.5.2.1）. $\mathscr{H}(E)$ 的这个子集是怎样的？由 14.5.1，这就是 $\phi(\operatorname{im}(\alpha))$，因而是二次超曲面的象，即 $\operatorname{im}(\alpha^*)$，这里 α^* 是正常二次超曲面 $\alpha^* = \phi(\alpha)$，

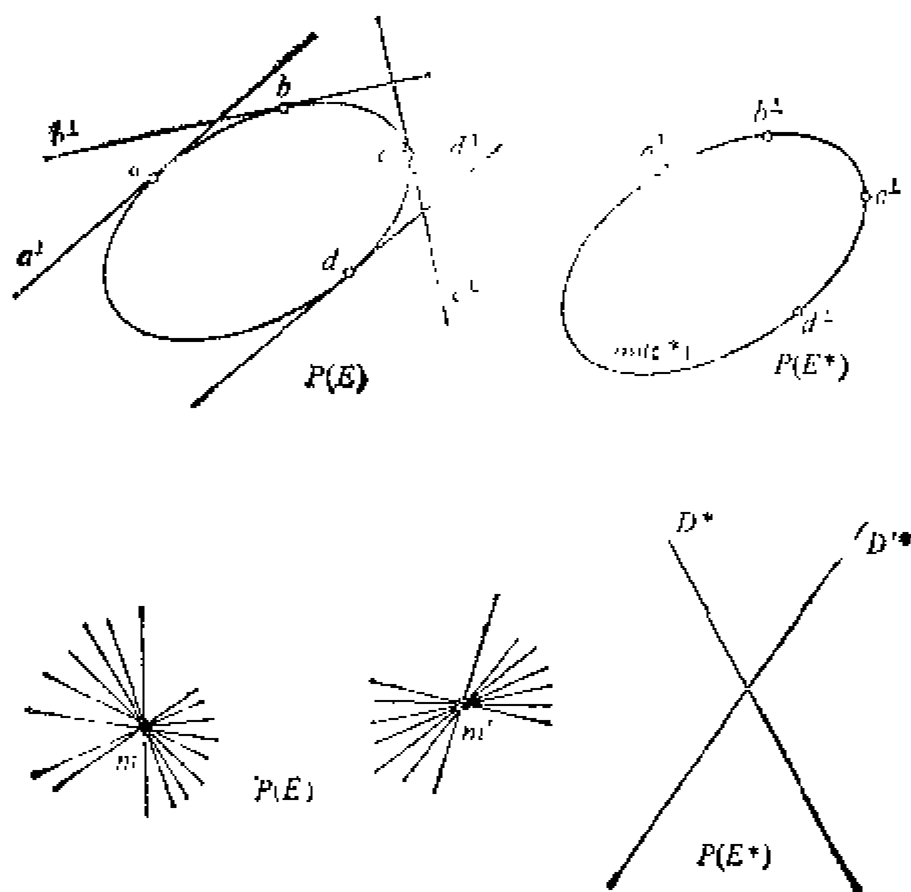


图 14.6.3.

由 α 的正常性有

$$\psi \in \text{Isom}\,(P(E);\ P(E^*)).$$

若 A 是 α 的方程 q 关于 E 的一组基的矩阵，则根据 14.1.4.3 及 13.2.0，α^* 的方程 $(\varphi^{-1})^*(q)$ 关于 E^* 的对偶基的矩阵将是 ${}^tA^{-1}AA^{-1}=A^{-1}$. $(\varphi^{-1})^*(q)=q^*$ 称为 α 的切面方程。实际上 $q^*(\xi)=0$ 是使得超平面 $\xi^{-1}(0)$ 与 α 相切的充要条件。关于 ξ 的坐标 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{n+1})$，这是 $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^*\xi_i\xi_j=0$，其中 a_{ij}^* 是 A^{-1} 的元素，见 14.8.13.

14.6.2 定义. $P(E^*)$ 中的二次超曲面称为切面二次超曲面。二次超曲面的切面束就是 PQ (E^*) 中的一条直线.

14.6.3 例

14.6.3.1 对向量空间 F，记 $PPQ(F)$ 为 F 的正常二次超曲面集合，则 14.6.1 表明 $*$ 定义一个双射:

$$*: PPQ(E)\to PPQ(E^*),$$

并且 $**=\text{Id}_{PPQ(E)}$. 但这个映射不能自然地扩张到整个 PQ (E) 上，我们下面就要看到这一点.

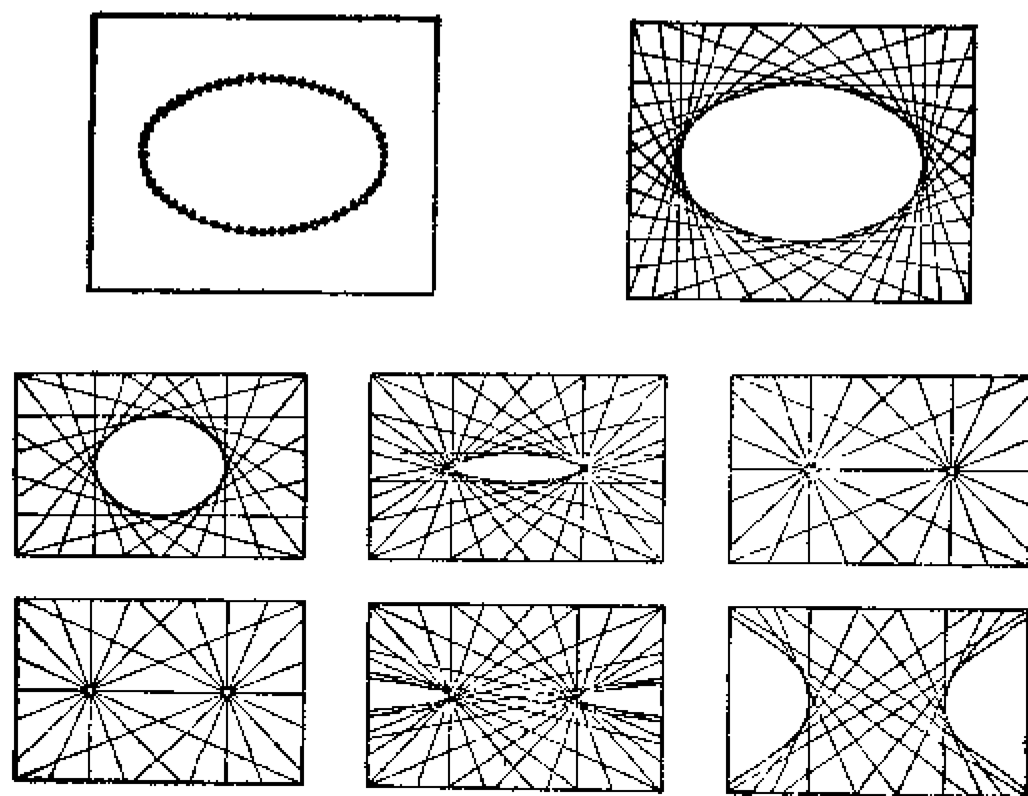


图 14.6.4.1.

14.6.3.2 设 $E=\mathbf{R}^3$, α^* 是 $P(E^*)$ 的圆锥曲线，其方程是 $2\xi\eta=0$，这里 $P(E^*)$ 的典范齐次坐标为 (ξ,η,ζ). 在方程为 $\xi=0$ 及 $\eta=0$ 的两条直线 D^*, D'^* 上，α^* 是退化的. 在 $P(E)$ 内 $D^*\cup D'^*$ 中所有直线的集合就是所有过点 $(1,0,0)$ 或 $(0,1,0)$ 的直线的集合. 这样的集合不可能是由 $P(E)$ 内一条圆锥曲线的切线所构成的集合（见 14.1.5.3).

14.6.4 我们可如此来推广 14.6.1 和 14.6.3.1 的有关情况. 设 α, β 在 $PPQ(E)$ 内，考察子集 $S=\{m^\perp : m\in \mathrm{im}(\beta)\}$，这里 $m^\perp$ 是 m 关于 α 的配极超平面. S 是否为切面二次超曲面的象：答案是：对

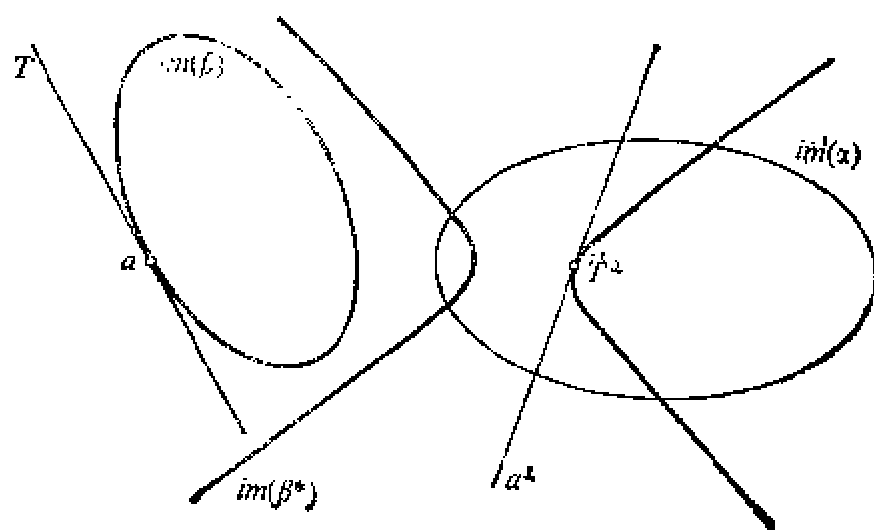


图 14.6.4.2.

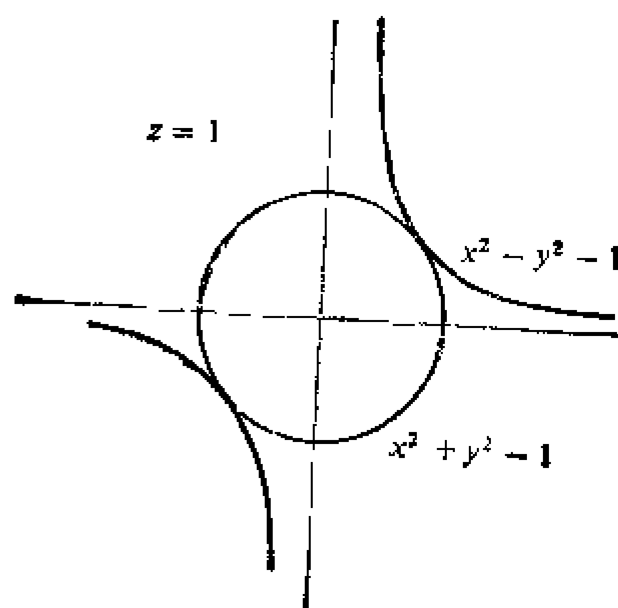


图 14.6.5.

的，$S = \mathrm{im}(\phi_\alpha(\beta))$，其中 $\phi_\alpha: P(E) \to P(E^*)$ 是 14.5.1 中与 α 相关联的同构。应用 14.6.3.1 的 $*^{-1} = *$ 于 $\phi_\alpha(\beta) \in PPQ(E^*)$，从而最终可得到 $PPQ(E)$ 的一个二次超曲面，称它为 β 关于 α 的配极二次超曲面，记为 β^*_α。

若 A，B 是 α，β 关于 E 的一个基的矩阵，则根据 14.1.4.3，$\phi_\alpha(\beta)$ 关于 E^* 的对偶基的矩阵是 ${}^tA^{-1}BA^{-1}$，再根据 14.6.1，β^*_α 的矩阵是 $({}^tA^{-1}BA^{-1})^{-1} = AB^{-1t}A$。

我们有 $(\beta^*_\alpha)^*_\alpha = \beta$. 若 $a \in \mathrm{im}(\beta)$，则 $a^\perp$ 切 $\mathrm{im}(\beta^*_\alpha)$ 于 $T^\perp$，这里 T 是切 β 于 a 的超平面。

14.6.5 例

14.6.5.1 在仿射的情形，我们让读者自己去阐明上面所述内容与 11.1.5 之间的关系。

14.6.5.2 若

$$q = x^2 + y^2 - z^2,\ q' = x^2 - y^2 - z^2,$$

分别表示 α，β，则 $\beta^*_\alpha = \beta$（图 14.6.5；关于这一主题可参看 14.8.14）。

14.7 正常二次超曲面的群

14.7.1 设 α 是 $P(E)$ 的正常二次超曲面，q 是 α 的方程，则任一 $f \in O(q)$ 提供了 $\underline{f} \in GP(E)$ 使得 $\underline{f}(\mathrm{im}(\alpha)) = \mathrm{im}(\alpha)$。其逆是错的：若 $\mathrm{im}(\alpha) = \emptyset$，则任一 $g \in GP(E)$ 使 $\mathrm{im}(\alpha)$ 稳定！与此相对的是当 K 是代数闭域时，14.1.6.2 表明 $\underline{f}(\mathrm{im}(\alpha)) = \mathrm{im}(\alpha)$ 确实等价于 $f \in O(q)$。这充分说明了以下定义是合理的。

14.7.2 定义. 若 q 是二次超曲面 α 的方程，则定义 $PO(\alpha) = \{\underline{f} \in GP(E); f \in O(q)\}$ 为二次超曲面 α 的群。也称 $PO(\alpha)$ 为 α 的射影正交群。

从 4.5 可知 $PO(\alpha)$ 仅与 α 有关，而与 q 的取法无关。从 13.9.13 可推导出 $PO(\alpha) = O(q)/\pm \mathrm{Id}_E$。当 $n+1$ 是偶数时，因 $-\mathrm{Id}_E \in O^+(q)$，故可定义 $PO^+(\alpha)$。当 $K = \mathbf{R}$ 时这与 $P(E)$ 的

可定向性有关。

14.7.3 从 13.7.5 及 13.7.9 可直接推导出：im (α) 中所含的极大子空间有相同的维数，等于 q 的指数减 1，它们在 PO (α) 的作用下都位于同一轨道上。当 $P(E)$ 是奇数维时，关于 $\mathrm{PO}^+(\alpha)$ 的作用也有同样的性质，但有唯一的例外：当 q 为中性时。此时有两个不同轨道。特别是，PO (α) 作用在 im (α) 的点上总是可迁的，而当 $\mathrm{PO}^+(\alpha)$ 存在时，它也有同样性质。

举例来说，这可应用于 14.4 的二次超曲面。

14.7.4 超平面对称的几何实现. 设 $\alpha\in PPQ(E)$，其方程是 q，$f\in O(q)$ 是关于超平面 $U\subset E$ 的对称(见 13.6.6)，相应的正交直和分解为 $E=U\overset{\perp}{\oplus}D$；因而$D$是直线。据 6.4.6，我们可按如下所述用几何方式得到 $\underline{f}\in$ PO (α)：若 $m=p(D)$，$H=p(U)$，则 $t\in P(E)\backslash m$ 的象 $\underline{f}(t)$ 可作为直线 $\langle m,t\rangle$ 上使 $[m,\langle m,t\rangle\cap H,t,\underline{f}(t)]=-1$ 的点而被得到。此外，H当然就是m关于α的配极超平面。

14.5.2.6 证明了 im (α) 作为整体关于 $\underline{f}$ 是稳定的。请注意，根据 13.7.12，这些对称生成 PO(α)。

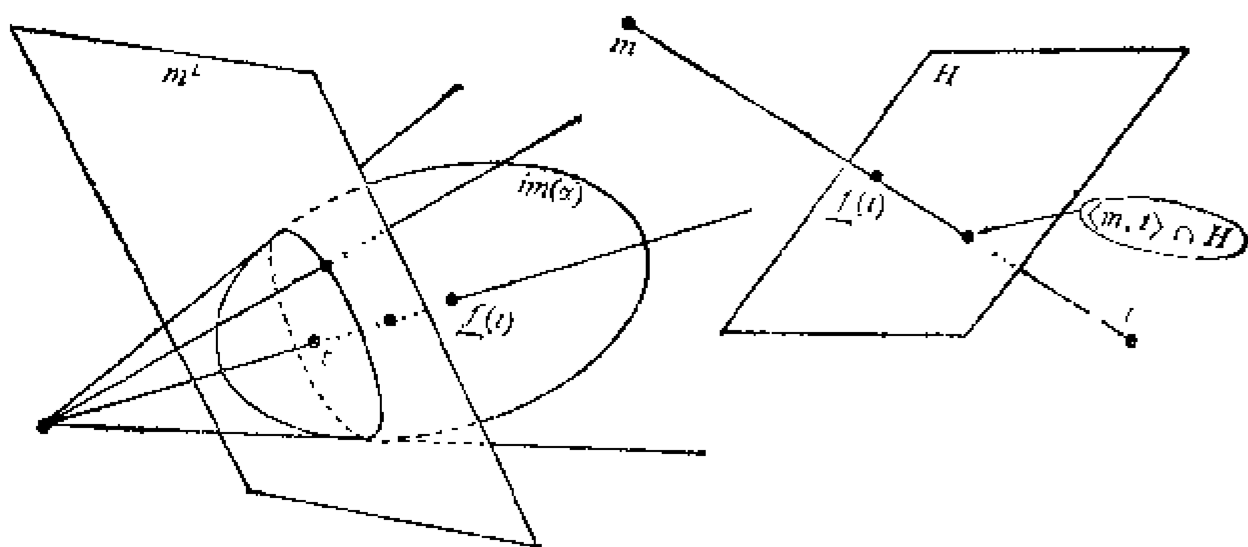


图 14.7.4.

14.8 练　　习

14.8.1 当 $K=\mathbf{R}$ 以及 $q(E)=\mathbf{R}$ 时，证明 14.1.6.2 仍然正确。

14.8.2 给出一个点 $m\in P(E)$ 以及一条直线 $D\ni m$，证明 $\{\alpha\in \mathrm{PQ}(E): m\in \mathrm{im}(\alpha)$ 且D与α相切$\}$是一个子空间。若 $m\notin D$ 这是否仍成立？

14.8.3 当 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时研究二次超曲面的象的可定向性。

14.8.4 证明 $C(n)$ （见 14.3.7）同胚于 $P^n(\mathbf{R})$ 的有向直线的 Grassmann 流形。

14.8.5 研究一个退化二次超曲面的象能否成为子流形 （$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$）。

14.8.6 设$\mathscr{F}$是 $P(E)$ 的二次超曲面束，α 是正常二次超曲面．证明$\mathscr{F}$至少包含一个二次超曲面调和外切于 α，且若这样的二次超曲面有两个，那末$\mathscr{F}$内所有二次超曲面都如此．

14.8.7 在 $P(E)$ 内给出了 $n(n+3)/2$ 对点 $\{m_i,\ n_i\}$，证明至少存在一个二次超曲面使 $m_i\perp n_i$ 对所有 i 成立（在 14.5.6 的范围内考虑）。

14.8.8 当 $\det A=0$ 时研究 14.5.4.6。

14.8.9 当 $K=\mathbf{R}$，α' 任意且 $\mathrm{im}(\alpha)=\varnothing$ 时证明 14.5.4.3 仍然正确。

14.8.10 设 α' 是正常二次超曲面，若 $\varphi'^{-1}\circ\varphi$ 的迹 $=0$，则称 α' 调和内切于 α。用几何方式解释这个条件．

14.8.11 设 α 是正常圆锥曲线，$\{a,\ b,\ c\}$，$\{a',\ b',\ c'\}$ 是关于 α 的两个自配极三角形．证明这六个点 a,b,c,a',b',c' 属于同一条圆锥曲线。

14.8.12 **对射**（需要时可见［FL］，第 260 页以后）．

14.8.12.1 设 Γ 是 $P(E)$ 的子空间的集合。我们把具有以下性质的任一双射 $f:\Gamma\to\Gamma$ 称为 $P(E)$ 的对射：对使 $U\subset V$ 的任

意 $U, V\in\Gamma$, 有 $f(U)\supset f(V)$. 证明若 m 是 $P(E)$ 的一个点,则 $f(m)$ 是 $P(E)$ 的超平面. 证明存在 $P(E)$ 的一个典范对射.

14.8.12.2 若 $f^2 = \mathrm{Id}_\Gamma$, 则称对射 f 是对合的. 利用射影几何基本定理(见 5.4.8)证明若 f 是对合对射,则 f 可以下述类型的某一个映射 $g: P(E)\to P(E^*)$ 得出:

(i) 存在交错双线性型 P 使得 $\forall m = p(x)\in P(E)$, 有 $f(m) = p(\{y\in E: p(x, y) = 0\})$;

(ii) 同样构造法;但这里 $\sigma: K \circlearrowleft$ 是 K 的对合自同构, P 关于 σ 是斜线性的,即 $P: E\times E\to K$ 关于 x 是线性的, 且满足 $P(y, x) = \sigma(P(x,y))\forall x, y\in E$.

14.8.12.3 研究不一定是对合的对射.

14.8.12.4 证实(见 4.9.12)若 $\dim P(E)$ 是奇数,则存在 $P(E)$ 的一对对单形, 使每对单形中第一个单形的顶点都在第二个单形的一个面内, 而第二个单形的顶点都在第一个单形的一个面内.

14.8.12.5 设 $\mathscr{C}$ 是 3 维欧氏仿射空间 X 的螺旋 (参看 [LF-AR], 第 4 章或 [BE] 第 3 章). 在每个点 $m\in X$, 我们考虑通过 m 且关于 $\mathscr{C}$ 的矩为零的直线的集合, 证明这些直线构成一个平面 $H(m)$. 证明映射 $m\longmapsto H(m)$ 是 X 的射影完备化空间 $\tilde{X}$ (见 5.1) 的一个对合对射在 X 上的限制, 这个对合对射是与一个交错型相关联的.

14.8.13 计算二次超曲面 $\sum_{i=1}^{n+1} k_i x_i = 0$ $(k_i \neq 0\forall i)$ 以及 13.9.6 及 13.9.8 中的正常二次超曲面的切面方程.

14.8.14 已知具有公共自配极单形的两个正常二次超曲面 β, γ, 找出正常二次超曲面 α 使得 $\gamma = \beta^*_\alpha$. 当 β, γ 是任意正常圆锥曲线时,借助于 16.4.10 讨论同一个问题.

14.8.15 研究以下问题: 找出与 $P(E)$ 内 $n(n+3)/2$ 个已知超平面相切的正常二次超曲面 α. 当 $n = 2$ 时作完全的讨论 (见 16.1.4).

14.8.16 Gérardin 的实现或: 一条射影直线的二次超曲面及圆锥

曲线. 设 E 是特征数不为 2 的域 K 上的二维向量空间, 把与它相关联的射影直线记为 $D=P(E)$, End E 是 E 的一切自同态的向量空间, $P(\mathrm{End}\,E)$ 是相关联的射影空间. 证明行列式映射

$$\det:\mathrm{End}\,E\to K$$

是一个二次型. 把与它相关联的 $P(\mathrm{End}\,E)$ 内的二次曲面记为 $Q(D)$. 证明 $Q(D)$ 是一个中性二次曲面. 研究它的母线与 E 的自同态间的对应关系.

研究与迹线性型:

$$\mathrm{tr}:\mathrm{End}\,E\to K$$

相关联的超平面截 $Q(D)$ 所得的圆锥曲线 $C(D)$. 是否任一圆锥曲线都能如此实现为一个 $C(D)$? 对 $Q(D)$ 也有同样的问题.

更进一步的细节可见 [GN], 第 IV 章.

第 15 章　仿射二次超曲面

除了由任一方向上直径的存在性来刻划二次超曲面(见15.5.9)以及掌握从仿射空间到它的射影完备化空间的过渡外，这一章并不含有真正的难点.这里列出的概念及结果都是第 3 章及第 14 章联系起来而引出的．但这样所得的产物即仿射二次超曲面具有相当重要的实际意义．实际上在三维空间或平面中除去直线与平面外最简单的曲线与曲面就是圆锥曲线与二次曲面，我们到处都能遇到它们．在数学、力学、物理、天文学中都会用到．作为第一级近似，行星和彗星都描绘出圆锥曲线；同样，Eiffel 铁塔的顶部以及 Montparnasse 高层的顶部在有风时都画出一个椭圆轨迹，它们的振幅应保持在适当范围内以使那里的人们不致感到不适．抛物线成为使两条直线接合的最简单方法(见 15.7.6).

欧氏圆锥曲线将是第 17 章的唯一研究对象.有关仿射及射影二次超曲面的更多内容可参看 [DQ], [ML], [PE], [EE].

本章中我们将使用来自第 5 章的以下概念：

X 是在特征数 $\neq 2$ 的域 K 上的有限 $n \geqslant 1$ 维的仿射空间.$\hat{X}$ 是与 X 相关联的 $n+1$ 维通用向量空间，$\tilde{X}=P(\hat{X})$ 是 X 的射影完备化空间，则 $\tilde{X}=X\cup\infty_X$ 且 $\infty_X=P(\vec{X})$ 称为 X 的无穷远超平面.

$Q(X)=\mathscr{P}_2(X)$ 表示 X 上仿射二次型的向量空间(见 3.3).对 $q\in Q(X)$，它的符号 $\vec{q}$ 在 $Q(\vec{X})$ 内．与 q 也可联系一个 $\hat{q}\in Q(\hat{X})$ (见 3.3.14)，使 $q=\hat{q}|_X$.

此外对在 a 向量化的 X，若 $q=q_2+q_1+q_0$，其中 $q_0\in K$，$q_1\in X_a^*$，则 q_2 等同于 $\vec{q}$.

15.1 定义及记法

仿射二次超曲面的最简单定义是在仿射的情形照搬 14.1.1，条件 $\vec{q} \neq 0$ 表明 q 确实是二次的。

15.1.1 定义. α 是 $P(Q(X))$ 的元素，若 $\alpha = p(q)$，$q \in Q(X)$，使 $\vec{q} \neq 0$，则称 α 为 X 的（仿射）二次超曲面，它们的集合记为 $P(Q(X)) = \mathrm{QA}(X)$. 若 $n = 2$，则称为圆锥曲线. α 的象是 $\mathrm{im}(\alpha) = q^{-1}(0)$. q 称为 α 的一个方程.

15.1.1.1 注. 以后我们将不再每次都说"q 是 α 的一个方程". $\mathrm{im}(\alpha)$ 当然仅与 α 有关，而与 q 的取法无关. 凡与 α 相关联的概念都应仅与 $\alpha = p(q)$ 有关，而与 q 无关.

15.1.2 例

15.1.2.1 若 E 是欧氏仿射空间，球面

$$S(a, r) \quad (a \in E, r \geqslant 0)$$

是二次超曲面的象，因为只需取 $q = d^2(a, \cdot) - r^2$ 即可. 请注意对任一 $k \in \mathbf{R}$，$q = d^2(a, \cdot) + k$ 都定义一个二次超曲面，但当 $k > 0$ 时，其象是空的.

15.1.2.2 设 X，X' 是两个仿射空间，$f \in \mathrm{Isom}(X; X')$ 且

$$\alpha \in \mathrm{QA}(X),$$

则方程是 $(f^{-1})^*(q)$ 的二次超曲面称为 α 在 f 下的象 $f(\alpha)$（$(f^{-1})^*$ 定义为 $(f^{-1})^*(q)(x') = q(f^{-1}(x'))\ \forall x' \in X'$）. 因此 $\mathrm{im}(f(\alpha)) = f(\mathrm{im}(\alpha))$. 特别，$\mathrm{GA}(X)$ 作用在 $\mathrm{QA}(X)$ 上. 对 X 的二次超曲面作分类就相当于寻找这些轨道. 参见 15.2 及 15.3.

15.1.3 其它等价定义

15.1.3.1 设 $\alpha \in \mathrm{QA}(X)$，$q$ 是 α 的方程，与此相应的 $\hat{q} \in Q(\hat{X})$，因此有一个完全确定的射影二次超曲面 $\tilde{\alpha} = p(\hat{q}) \in \mathrm{PQ}(\hat{X})$，因为例如由 3.3.13 或 3.3.15 有 $\widehat{\lambda q} = \lambda \hat{q}$. 由于 $q = \hat{q}|_X$，特别地，$\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \cap X$. $\mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \cap \infty_X$ 是什么？由于

$$\vec{q} = \hat{q}|_{\vec{X}} \text{ 及 } \infty_X = P(\vec{X}),$$

因此 $\mathrm{im}(\tilde{\alpha})\cap\infty_X=\mathrm{im}(\vec{\alpha})$，这里 $\vec{\alpha}=p(\vec{q})\in\mathrm{PQ}(\vec{X})$。或根据 14.1.3.3，$\vec{\alpha}=\tilde{\alpha}\cap\infty_X$。

反之，设 $P(E)$ 是有限维射影空间，$P(H)$ 是 $P(E)$ 的超平面，β 是 $P(E)$ 的二次超曲面，如果想要找出 $X=P(E)\setminus P(H)$ 的一个二次超曲面(见 5.1)，则我们把 ∞_X 等同于 $P(H)$，且若 r 是 β 的一个方程，命题 3.3.14 表明 $r|_X$ 定义 X 的一个二次超曲面，记为 $\beta|_X$，其唯一条件是 $r|_X\neq 0$，即 $\beta\cap P(H)$ 是一个二次超曲面(见 14.1.3.3) 或 $\infty_X\not\subset\mathrm{im}(\beta)$。

15.1.3.2 附注. 在 X 的仿射二次超曲面 α 与 $\tilde{X}$ 的使 $\mathrm{im}(\beta)\not\supset\infty_X$ 的射影二次超曲面 β 间有一个自然双射 $\sim$。对 α 的任一方程 q 有 $\tilde{\alpha}=p(\hat{q})$，且 $\tilde{\alpha}\cap\infty_X=\vec{\alpha}$（这里 $\vec{\alpha}=p(\vec{q})$）称为 α 的无穷远二次超曲面。(若 $n=2$，称为 α 的无穷远点，若 $n=3$，称为 α 的无穷远圆锥曲线。)我们有 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\tilde{\alpha})\cap X$。若 $\tilde{\alpha}$ 是正常的则定义 $\alpha\in\mathrm{QA}(X)$ 为正常的。α 的秩定义为 $\tilde{\alpha}$ 的秩，α 的指数定义为 $\tilde{\alpha}$ 的指数。

15.1.4 注. $\mathrm{im}(\beta)\supset\infty_X$ 只可能出现在两种情形中：秩$(r)=1$，则 $\mathrm{im}(\beta)=\infty_X$，从而 $\mathrm{im}(\beta)\cap X=\emptyset$；或者秩$(r)=2$，则

$$\mathrm{im}(\beta)=\infty_X\cup H,$$

这里 H 是平行于 ∞_X 的超平面，从而 $\mathrm{im}(\beta)\cap X$ 是 X 的(仿射)超平面。它的验证留给读者作练习。

15.1.5 实用上，对 $\alpha\in\mathrm{QA}(X)$，我们引入数偶($\tilde{\alpha}$ 的秩，$\tilde{\alpha}$ 的秩)。关于 $\mathrm{GA}(X)$ 在 $\mathrm{QA}(X)$ 上的作用，这个数偶是不变的(见 5.2.2)。

15.1.6 写法. 对 X 的一个仿射标架以及与 3.3.15 类似的记号，我们有以下的写法：

15.1.6.1 $q=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j+2\sum_i b_ix_i+c$；$\vec{q}=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$；在与此相关联的齐次坐标中，

15.1.6.2 $\hat{q}=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j+2\sum_i b_ix_it+ct^2$.

我们使两个矩阵 $\hat{A}$，$\vec{A}$ 与 q 联系起来，因此

$$
\textbf{15.1.6.3}\begin{cases} \vec{A} = (a_{ij}), \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \vec{A} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ b_1 \cdots\cdots b_n & c \end{pmatrix} \\ \text{秩}(\alpha) = \text{秩}(\hat{A}), \text{秩}(\tilde{\alpha}) = \text{秩}(\vec{A}). \end{cases}
$$

15.2 仿射二次型的约化

15.2.1 从 13.1.4.5 我们知道想对仿射二次超曲面进行分类是没有指望的（见 15.1.2.2）。但可以把它们约化为以下三种类型。设 $\alpha = p(q)$，$q \in Q(X)$。根据 13.4，存在 $\vec{X}$ 的基使得 $\vec{q}$ 写成 $\vec{q} = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$，其中 $r = (\vec{\alpha})$ 的秩，$a_i \neq 0$ $\forall i = 1, \cdots, r$。

对于与这个基相关联的仿射标架，据 15.1.6.1，有

$$
q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c, \quad \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0;
$$

作变换 $x_i \mapsto x_i + \frac{b_i}{a_i}$，我们可假设 q 能写成

$$
q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i + c, \quad \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0.
$$

若 $r < n$，则可作变换 $\sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i \longmapsto b_n x_n$，从而

$$
q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2b_n x_n + c, \quad \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0;
$$

若 $r < n$ 且 $b_n \neq 0$，则可作变换 $x_n \longmapsto x_n + \frac{c}{2b_n}$，得到

$$
q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2x_n, \quad \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0.
$$

这样，q 必定是以下三种类型之一：

15.2.2

$$\begin{cases}\text{类型 I} & q=\sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2, \ \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0, \ 1\leqslant r\leqslant n;\\ \text{类型 II} & q=\sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2+1, \ \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0, \ 1\leqslant r\leqslant n;\\ \text{类型 III} & q=\sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2+2x_n, \ \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0, \ 1\leqslant r\leqslant n-1.\end{cases}$$

借助于 15.1.5，从下表可看出不同类型的两个二次超曲面在 GA (X) 的元素作用下绝不可能从一个变成另一个:

15.2.3

α 任意

类型	$\hat{\alpha}$ 的秩	$\bar{\alpha}$ 的秩
I	r	r
II	$r+1$	r
III	$r+1$	r

α 正常:

类型	$\hat{\alpha}$ 的秩	$\bar{\alpha}$ 的秩
II	$n+1$	n
III	$n+1$	$n-1$

15.2.4 注. 在某些情形中可利用"中心方程"进行具体计算：见 15.5.4.

关于这些类型的其它特征及这种约化的几何解释，见 15.7.4.

15.3 当 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时仿射二次超曲面的分类

15.3.1 命题. 设 $K=\mathbf{C}$，则 QA (X) 在 GA (X) 作用下的轨道关于一个已知基具有以下形状:

$\mathrm{I}(r)$: $\sum_{i=1}^{r} x_i^2$; $1 \leqslant r \leqslant n$;

$\mathrm{II}(r)$: $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 + 1$; $1 \leqslant r \leqslant n$;

$\mathrm{III}(r)$: $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 + 2x_n$; $1 \leqslant r \leqslant n-1$.

特别，正常二次超曲面只有两个轨道：$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 1$ 及 $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_n$.

这可从 13.4.2 的证明中立即得出。对 $K=\mathbf{R}$ 的情形，因为我们的研究是在 $\mathrm{QA}(X)$ 内而不是在 $Q(X)$ 内进行，故在类型 I 及 III 内可以交换 r 与 s。为了看出以下形状的轨道的确是不同的，我们应用 13.4.7 下 $\bar{q}$ 及 $\hat{q}$:

15.3.2 命题. 若 $K=\mathbf{R}$，则 $\mathrm{QA}(X)$ 在 $\mathrm{GA}(X)$ 作用下的轨道关于一个已知基具有以下形状：

$\mathrm{I}(r, s)$: $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2$, $r \geqslant s$, $1 \leqslant r+s \leqslant n$;

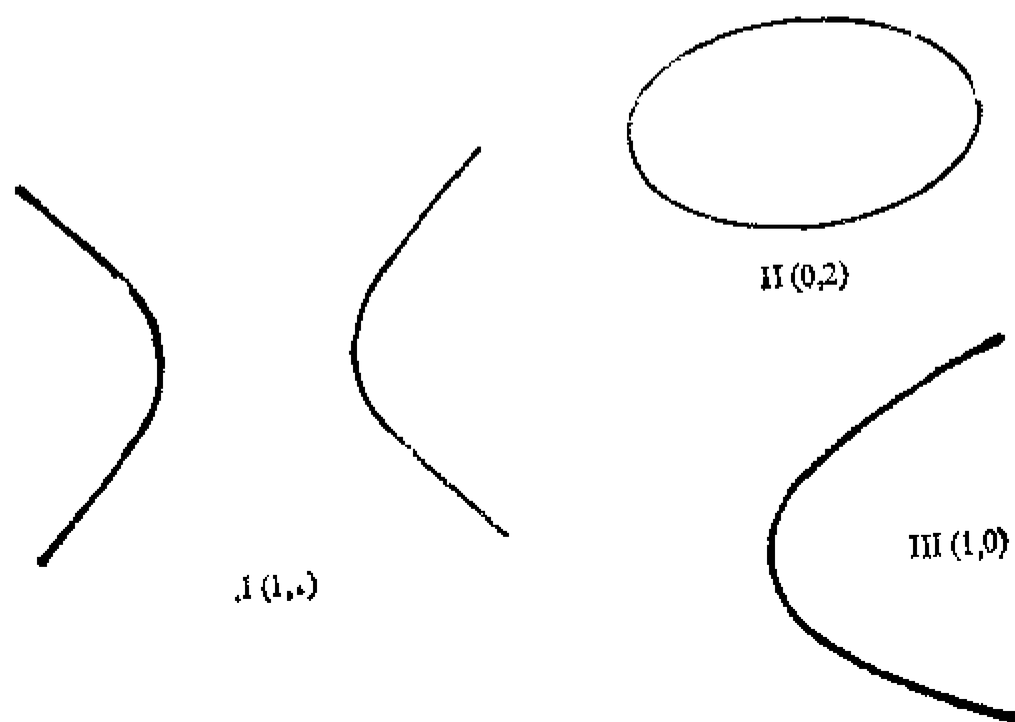


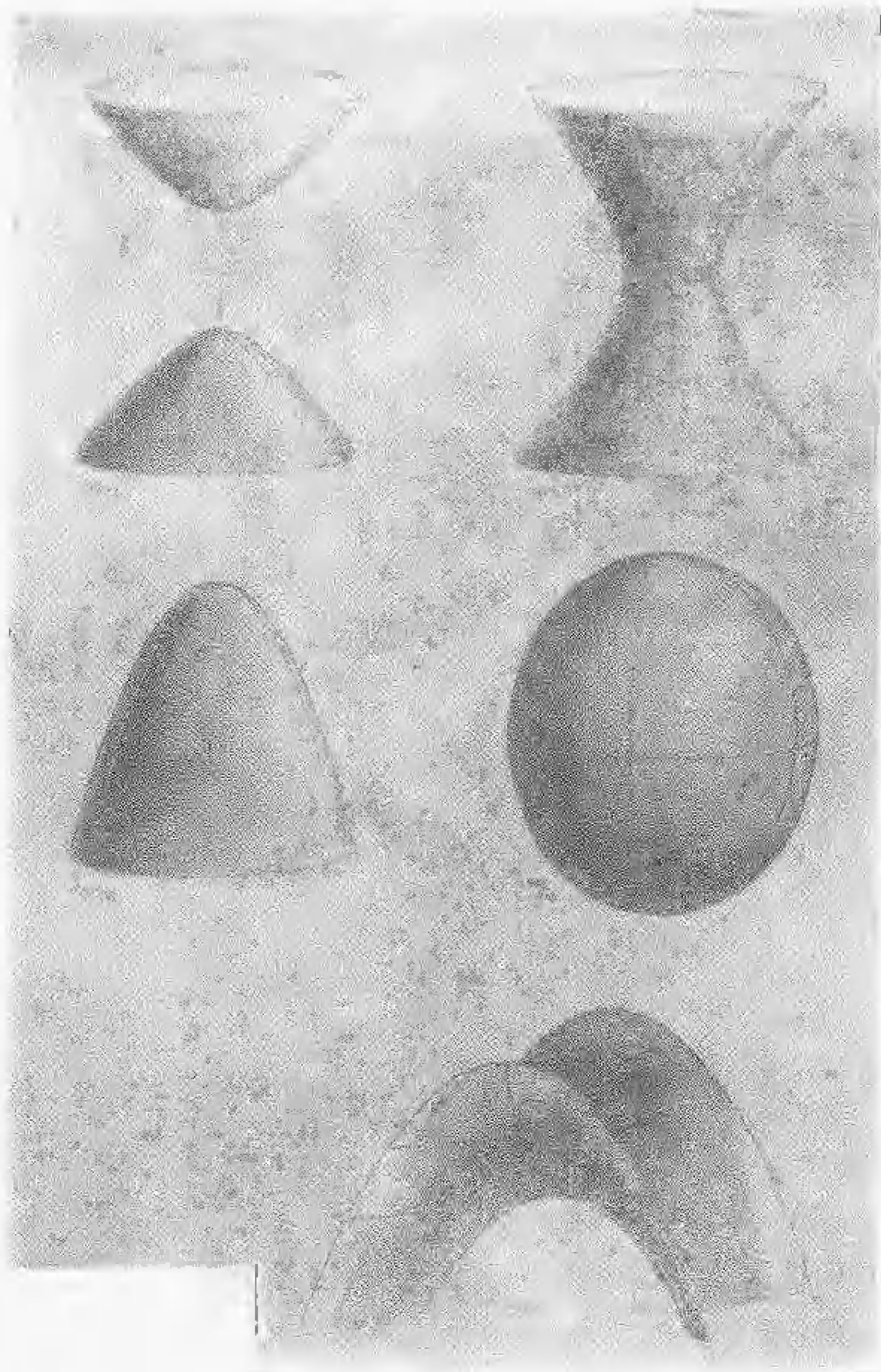
图 15.3.3.1.



图 15.3.3.2.

Lohr 铸造厂，引自 Jürgen Joedicke 的《帆与壳体结构》，Vincent 及 Fréal 出版公司，巴黎

Lohr 铸造厂的壳体的不同寻常的外形是为了这类应用而对一种典型形状作探索的结果．为了迅速排空开工时产生的浓烟以及保证足够的通风，有两种可能的方法．第一种方法是求助于完善的通风设施，正如在美国所流行的那样．第二种方法与之相反，不采用过分的技术设施，尽力利用建筑的形状以得到自然的通风．工程的负责人已明确表示不想寻求过分完美的解决方法．这样，大厅的顶盖就诞生了，它的形状是以连续的方式向高处收缩的，这就保证了大厅能像烟囱一样获得良好通风，这个形状用实验作过研究，其结果肯定了原先的期望．大厅的采光提出了另一个问题．工场用玻璃天棚在北面照明，事实证明极为有利．漏斗状的壳体被设计得能安装一个很大的东北玻璃



Rouché 和 de Comberousse,《几何教程》, Gauthier-Villars 出版社, 巴黎

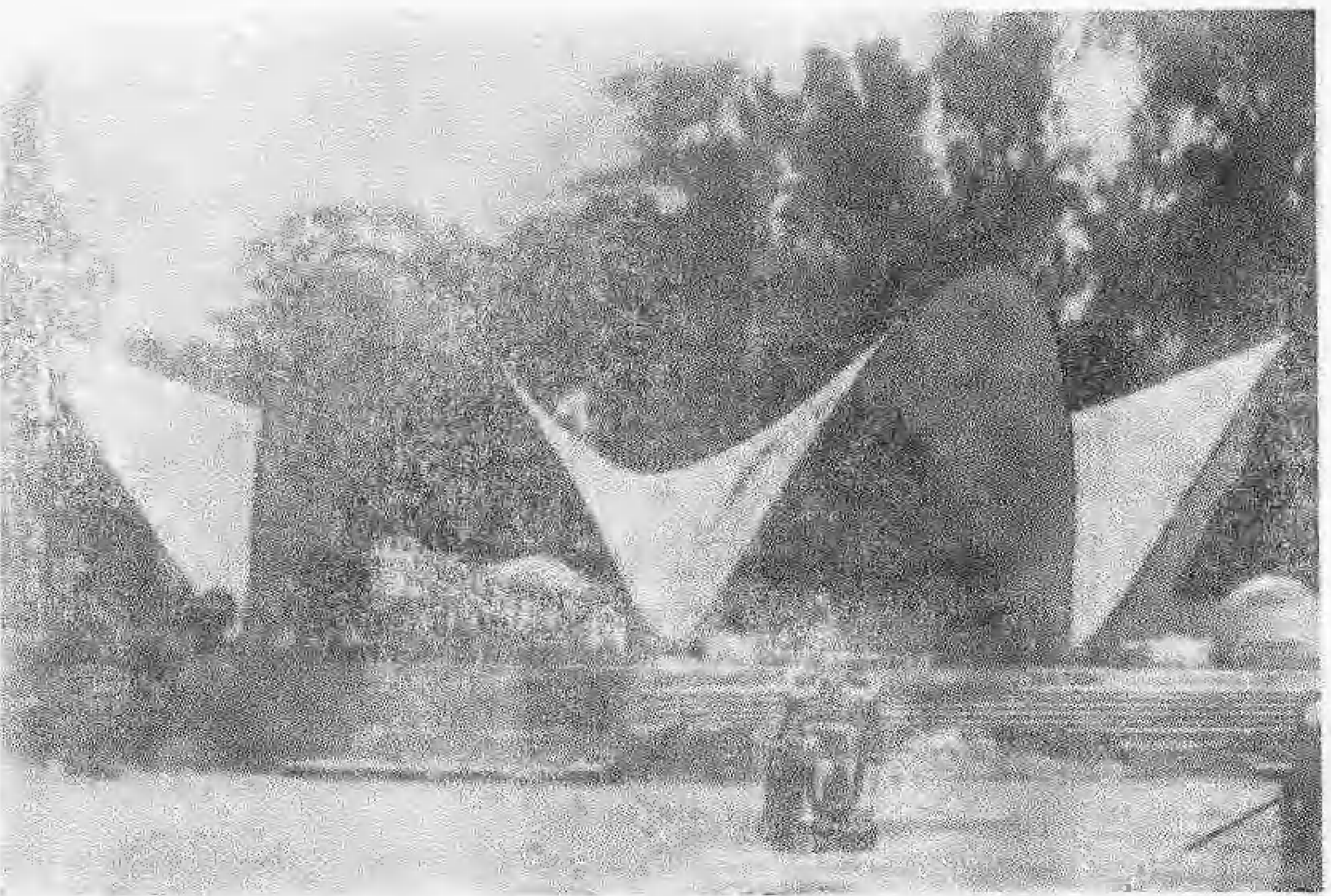


图 15.9.3.3.

引自 Jürgen Joedicke，[illegible]，Vincent 及 Fréal 出版公司，巴黎。

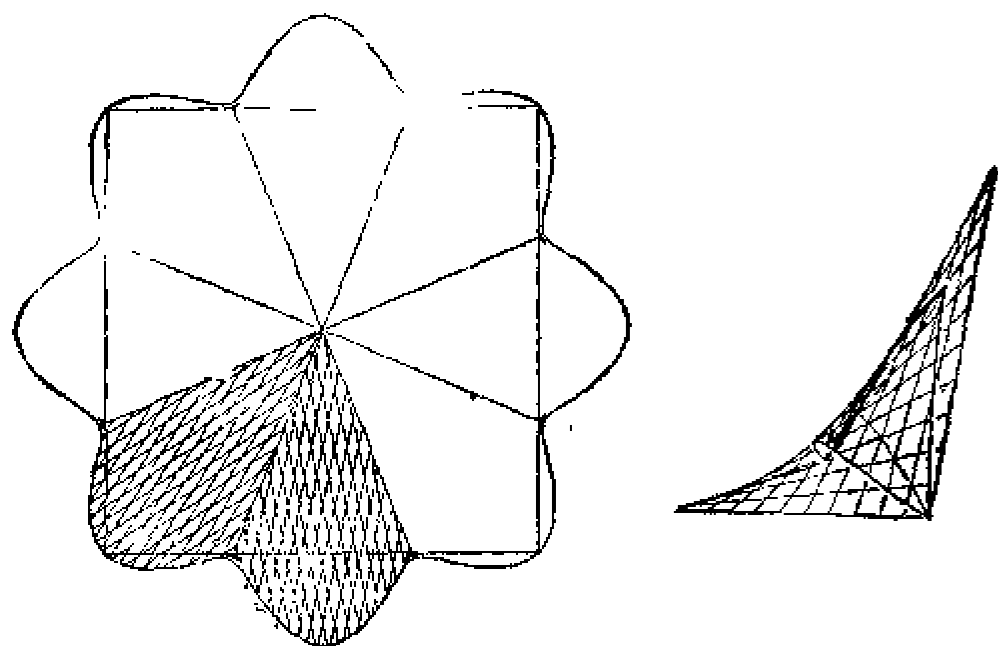


图 15.3.3.3.

壳体由双曲抛物面的八个相等的截片组成，右空图表明了每个截片的几何结构.

$$\mathrm{II}(r, s): \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 1,\ 1 \leqslant r + s \leqslant n;$$

$$\mathrm{III}(r, s): \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 2x_n,\ r \geqslant s,\ 1 \leqslant r + s \leqslant n - 1.$$

15.3.3 低维的例

15.3.3.1 当 $K = \mathbf{C}$ 以及 $n = 2$ 时，方程为 $x_1^2 + x_2^2 + 1$ 的圆锥曲线 α 的象同胚于柱面 $\mathbf{R} \times S^1$：实际上 $\tilde{\alpha}$ 有一个象同胚于 S^2 (见 14.3.6) 且 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \setminus [\mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \cap \infty_X]$ 是从 $\mathrm{im}(\tilde{\alpha})$ 中除去子集 $\mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \cap \infty_X$ 而得到的，后一个子集由两个不同点构成，从一个球面 S^2 中除去两个点后同胚于 $\mathbf{R} \times S^1$. 对于方程为 $x_1^2 + 2x_2$ 的 α，它的象是图象 $x_2 = -x_1^2/2$，同胚于 $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$.

15.3.3.2 当 $K = \mathbf{R}$ 以及 $n = 2$ 时，正常圆锥曲线是 II(2, 0)，II(1, 1)，II(0, 2)，III(1, 0). 其中第一个的象是空集. 我们把类型 II(1, 1)（相应地：II(0, 2)，III(1, 0)）的仿射圆锥曲线称为双曲线（相应地：椭圆，抛物线）.

15.3.3.3 当 $K = \mathbf{R}$ 以及 $n = 3$ 时，象为非空的正常仿射二

次曲面是 II(2, 1), II(1, 2), II(0, 3), III(2, 0), III(1, 1), 分别称为：双叶双曲面，单叶双曲面，椭球，椭圆抛物面，双曲抛物面。只有 II(1, 2), 和 III(1, 1) 含有仿射直线，因为这是使二次型 $\hat{q}$ 为中性的仅有的情形（见13.1.4.3, 14.4 及 14.4.6)。

15.4 实及复的正常仿射二次超曲面的拓扑性质及微分性质

15.4.1 我们把退化的情形留给读者作练习，故假设在这一节里 $\alpha \in \mathrm{QA}(X)$ 是正常的，$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$。在复数情形，只有当 α 是第 III 类型时才是容易的，因此时 $\mathrm{im}(\alpha)$ 是 $x_n=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2$ 的图象(见 15.3.1)，从而 $\mathrm{im}(\alpha)$ 同胚于 $\mathbf{C}^{n-1}\simeq\mathbf{R}^{2(n-1)}$。若 α 是第 II 类型的，则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 是

$$\mathrm{im}(\tilde{\alpha})\backslash[\mathrm{im}(\tilde{\alpha})\cap\infty_X],$$

这里 $\mathrm{im}(\tilde{\alpha})$ 是 14.3.7 的 $C(n+1)$，它的拓扑不是初等的，且在 $C(n+1)$ 内 $\mathrm{im}(\tilde{\alpha})\cap\infty_X$ 与 $C(n)$ 同胚。我们将不再讨论这些情形。

15.4.2 与之相对的是当 $K=\mathbf{R}$ 时，我们将看到正常二次超曲面的象的同胚类都是初等的。在图 15.3.3 中我们看出 II(2 ,1) 同胚于 $\mathbf{R}^2\times$ {两个点} 或 $\mathbf{R}^2\times S^0$，这里 S^0 是 $\mathbf{R}$ 内的 0 维球面。II(1,2) 同胚于 $\mathbf{R}\times S^1$，II(0, 3) 同胚于 S^2。这个现象是有一般性的。

15.4.3 命题. II(r, s) 类型的正常仿射二次超曲面的象微分同胚于 $\mathbf{R}^r\times S^{s-1}$。

取一组基使 α 可写成

$$\sum_{i=1}^{r}x_i^2-\sum_{i=r+1}^{n}x_i^2+1,$$

再把空间 X 等同于 $\mathbf{R}^{r+s}$ 且把 $\mathbf{R}^{r+s}$ 写成欧氏空间的积 $\mathbf{R}^{r+s}=\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^s$。把坐标写成数偶 (x, y)，则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 的方程是 $\|x\|^2-\|y\|^2+$

$1=0$。但映射 $(x, y)\longmapsto\left(x, \frac{y}{\sqrt{\|x\|^2+1}}\right)$ 是 $\mathbf{R}^{r+s}$ 的 C^∞ 微分同胚 f，它把使 $\|x\|^2-\|y\|^2+1=0$ 的 (x, y) 变换为使 $\|y\|=1$ 的 (x, y)。从而 $f(\mathrm{im}(\alpha))=\mathbf{R}^r\times S^{s-1}$。

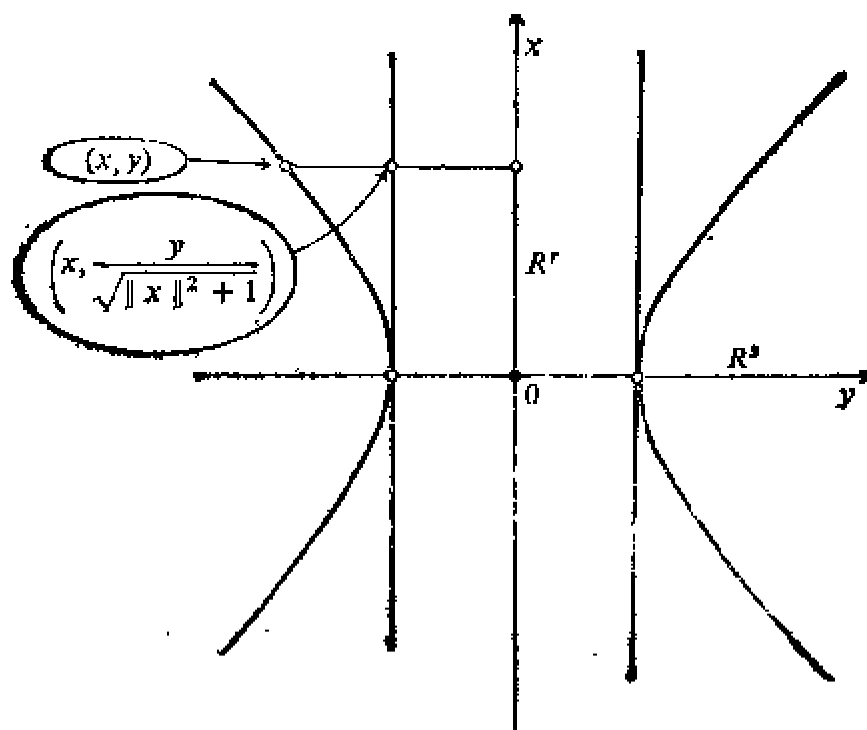


图 15.4.3.

15.4.4 至于第 III 类型的 α，正如在15.4.1中已经指出的，它们的象是一个 $n-1$ 元函数的图象，从而总是同胚于 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的。

15.4.5 子流形的观点. 在正常二次超曲面的情形显然 15.3.1 或 15.3.2 的方程定义了一些子流形，它们的实余维数分别是一或二，按 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 而定；只要应用 [B-G]，第 56 页即可得到。至于 α 在 $m\in\mathrm{im}(\alpha)$ 的切空间，它与 m 关于 α 的配极超平面 $m^\perp$ 等同。这可与 14.3.8 同样证明，不过更简单些。

15.4.6 凸性. 从 15.3 的图形中可看出对 r, s 的某些值，II(r, s) 或 III(r, s) 类型的二次超曲面的象是X的凸形的边界.事实上：

15.4.7 命题. 实正常仿射二次超曲面的象是一个凸形的边界当且仅当它们是 II$(0,n)$ 或 III$(n-1,0)$ 类型的.在 II$(n-1,1)$ 的情形，象集的两个连通分支的每一个(见 15.4.3) 都是一个凸形

的边界。

在 $\mathrm{III}(r, s)$ 的情形,有关断言可从 11.8、11.2 得出，因为这里涉及的是函数图象。$\mathrm{II}(0, n)$ 的情形就是单位球面，它是单位球 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1$ 所成的凸形的边界。$\mathrm{II}(n-1, 1)$ 的情形也提供了一个凸形，因为它是下列函数

$$x_n = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 1}$$

的两个图象的并集,而这些图象都有凸的边界(见 11.8、11.2)。因此只剩下对 $2 \leqslant r \leqslant n-1$ 证明 $\mathrm{II}(r, n-r)$ 不可能是凸形的边界，为此仍要应用 11.8，11.2，不过是对象集的局部表达式来用。例如在 $x_n=1$、其余坐标均为 0 的点 n 处，可将象集看成下式

$$x_n = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{n-1} x_i^2}$$

的图象。

15.4.3 注. 在一个仿射空间 X 内,凸形的整个边界以及二次超曲面的整个象集都有以下性质：当用 X 内不含于这些超曲面中的几乎所有的直线(见 14.1.3.4) 截割这些超曲面时，其交点至多是两个. Marchaud 的一个非常精致的定理断定其逆也对,参看 [MD]. 这一结果属于所谓"有限几何"的范围，这方面的基本参考文献是 [H-K]，但也见 [PL]。

15.5 正常仿射二次超曲面的配极变换

这里的 K 又是任意的。

15.5.1 若 α 是 X 的正常二次超曲面，则把 $\tilde{X}$ 内关于 $\tilde{\alpha}$ 的配极变换称为关于 α 的配极变换。当然这样做的前提是这个配极变换在 X 内有意义. 例如当 $m \in X$ 关于 α 的配极超平面 $m^{\perp}$ 异于 ∞_X

时，此时 $m^{\perp}\cap X$ 是X的超平面，仍被称为m的配极超平面并记为$m^{\perp}$.

15.5.2 中心. 我们期待着 ∞_X 点的配极超平面以及 ∞_X 的极点起仿射的作用。确实，设 $c=\infty_X^{\perp}$ 是 $\tilde{X}$ 的超平面 ∞_X 的极点，则有两种可能：$c\in\infty_X$ 或 $c\in X$. 首先假设 $c\in X$ 且应用 14.7.4 于 $H=\infty_X$ 以及 $m=c$. 考虑到 6.4.2，我们看到X关于中心c的对称，即$-\mathrm{Id}_{X_c}$，属于 $\tilde{\alpha}$ 的群，特别它使 $\mathrm{im}(\alpha)$ 稳定，即c是 $\mathrm{im}(\alpha)$ 的对称中心。我们可把这一点精确地表述为：

15.5.3 命题. 对于一个正常仿射二次超曲面α，以下三个条件等价：

(i) 二次超曲面α是第 II 类型的(见 15.2.2)；

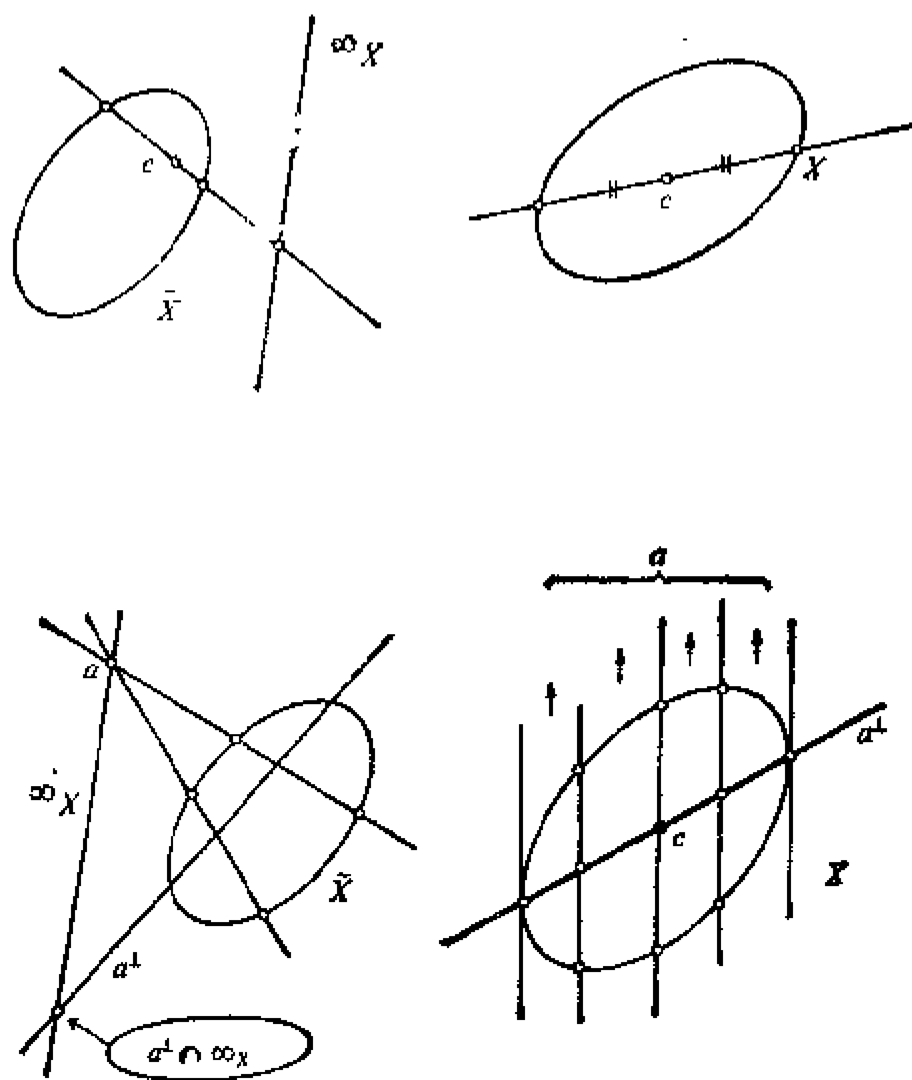


图 15.5.3.

(ii) $\infty_X^\perp \in X$;

(iii) 超平面 ∞_X 不与 α 相切。

若这三个条件之一满足，则点 $c=\infty_X^\perp$ 是 $\mathrm{im}(\alpha)$ 的对称中心。我们称 α 是有心二次超曲面，$c=\infty_X^\perp$ 称为它的中心。我们也称第 III 类型的二次超曲面为抛物面。

(ii) 和 (iii) 的等价性就是 14.5.2.1。关于 (i) 和 (ii) 的等价性，我们可把 15.5.5.2 的中心方程应用于第 II 类型的情形，$\infty_X^\perp$ 的齐次坐标 $(x_1,\cdots,x_n,t)$ 是 $(0,\cdots,0,1)$，而在第 III 类型的情形，则是 $(0,\cdots,0,1,0)$。但 $(0,\cdots,0,1)\in X$，$(0,\cdots,0,1,0)\in\infty_X$。

15.5.4 注。反过来，我们可利用配极变换得到 15.2 的一个几何证明。但在退化的情形，这也和 15.2 的显式计算同样复杂。此外，15.2 的计算结合 13.4.8 可以得到完整的具体约化方法。对于这个具体约化方法，最好先借助方程 15.5.5.2 找出可能有的中心，然后再应用 15.2。参见 15.7.4 及 15.7.10。

15.5.5 记法。如果在一个任意的仿射标架内 α 有一个由 15.1.6.1 给出的方程 q，则关于与此相关联的齐次坐标 $(x_1,\cdots,x_n,t)$，X 内的配极变换可如下得到(应用 13.1.3.6 及 14.5.3)：

15.5.5.1 $(\xi_1,\cdots,\xi_n,\theta)$ 的配极超平面的方程为：

$$\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i x_j+\sum_i b_i(\theta x_i + t\xi_i)+c\theta t=0.$$

举例说，为了寻找 ∞_X 的极，我们知道这个极 $\infty_X^\perp$ 属于生成 ∞_X 的几个点 $(1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1,0)$ 的配极超平面内，这样就得到中心方程组：

15.5.5.2 $$\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_i}=\sum_j a_{ij}x_j+b_i=0,\ i=1,\cdots,n.$$

15.5.6 直径。现在考虑一个点 $a\in\infty_X$ (图 15.5.3)，和它的配极超平面 $a^\perp$。14.7.4 及 6.4.2 表明 α 的象关于下述仿射对称是整体稳定的：这个仿射对称是绕 X 的仿射超平面 $a^\perp=a^\perp\cap X$，并且平行于以 a 为无穷远点的直线的方向 (若 $a^\perp\neq\infty_X$!) 所作的对称。

15.5.7 定义. 所谓仿射空间X的子集F的直径是指有下述性质的超平面H：存在X的直线的方向$\vec{D}$，使得绕H且平行于$\vec{D}$的仿射对称使F保持稳定。

15.5.8 15.5.6 中的讨论表明正常仿射二次超曲面α具有直径，即有超平面仿射对称。实际上它所有的直径与使$a^{\perp} \neq \infty_X$的$a \in \infty_X$一样多。但$a^{\perp} = \infty_X$等价于$a = \infty_X^{\perp}$。因此只有两种可能性：

第一种情形：若α是以c为中心的二次超曲面，则$\mathrm{im}(\alpha)$关于所有的直线方向都是对称的，因此关于所有的超平面方向是对称的，这是因为$a \longmapsto a^{\perp} \cap \infty$是关于$\vec{\alpha}$的配极变换，而这里的$\vec{\alpha}$不是退化的(见 15.1.3)。此外相应的对称超平面都通过中心c。

第二种情形：若α是抛物面，设$c = \infty_X^{\perp} \in \infty_X$是它与无穷远超平面的接触点，则除$c$外所有的直线方向都是对称方向。直径不可能取所有的超平面方向，特别，直径总是包含c的方向在内的。举例来说在平面的情形直径都是平行的。

很自然地我们想要知道上述性质是否刻划了二次超曲面的象集的特征。当$K = \mathbf{R}$时，回答是令人满意的。

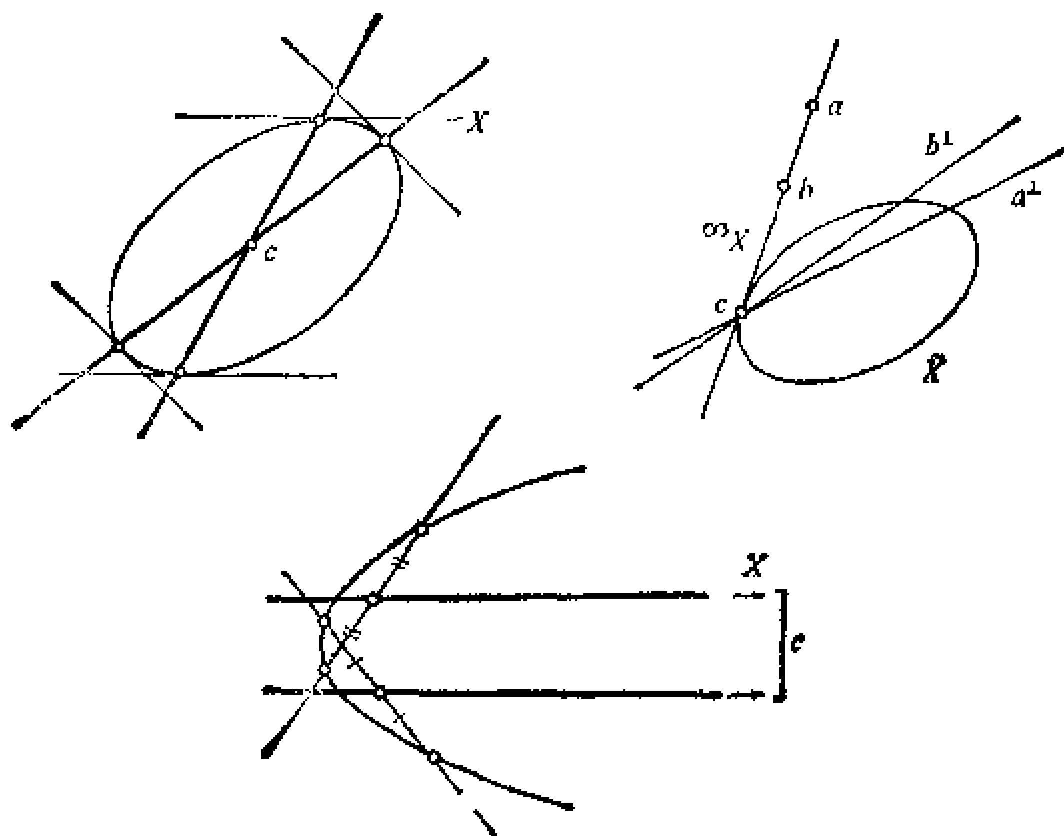


图 15.5.8.

15.5.9 定理. 设K是有限维实欧氏仿射空间的一个紧集,使得对任意的超平面方向,K有一个平行于此方向的直径,则K是有相同中心而且彼此位似的一些二次超曲面的并集.

只要把 2.7.5.9 及 2.7.5.10 应用到K在X的仿射群内的稳定子群 $G=GA_K(X)$ 即可. 由此可得在X上存在一个关于G不变的欧氏结构. 但 8.2.9 表明定理假设中的仿射对称是关于这个欧氏结构的正交对称.由于对每一方向都有这样的对称,根据 8.2.12 可得 $G=Is_c(X)$, 这里c是K的中心. 因此 $\forall x\in K$, 子集K应包含x在G下的轨道, 它是以c为中心过x的球面.

以 11.8.10.7 为基础,可对 15.5.9 作出一个几何的证明.

15.5.10 注. 读者可以看到,有一些问题我们并没有给出解答.也还可以提出别的一些问题:例如对平面代数曲线的直径的研究.关于后一问题,可参看 [LB2], 第 150 页.

15.5.9 的应用之一是关于 Minkowski 几何的. 这种几何就是关于有限维赋范实向量空间的度量结构,其度量定义为 $d(x,y)=\|x-y\|$. 这样的一种几何是否有对合等度量变换? 15.5.9 表明若这种几何关于所有的方向都有对合等度量变换, 则它必定是欧氏几何. 关于这些 Minkowski 度量,请看 [B-K], 第 133 页以后.

直径是与 im (α) 中平行于已知方向的弦的中点轨迹有联系的,请参看 15.7.5.

正常仿射二次超曲面α的两个直径 H, H' 称为共轭的, 若它们的方向 $\vec{H}$, $\vec{H}'$ 关于 $\vec{\alpha}$ 满足 $(\vec{H})^\perp\perp(\vec{H}')^\perp$. 在圆锥曲线的情形,我们得出一些应该熟记的简单图形, 参看 15.7.7, 也见 15.6.4.

若α不是正常的,也可定义(见 14.5.6) 一个配极变换, 参看 15.7.4 中借助于这个配极变换对 15.2 的解释.

15.5.11 渐近锥面,渐近线. 我们也期待着 im $(\alpha)\cap\infty_X$ 的点起某种作用, 对这些点的切线也有同样的期望. 我们把以c为顶点外切于α的锥面称为α的渐近锥面(见 14.5.3). 只有当 $c\in X$ 时才使人感兴趣.若 $n=2$, 此锥面由两条直线构成或缩成c点.若这两条直线存在,则被称为α的渐近线.当 $n=2$, $K=\mathbf{R}$ 时,只

有双曲线才有渐近线。当 $n=3$, $K=\mathbf{R}$ 时，只有双曲面 $H(2, 1)$ 及 $H(1, 2)$ 才存在渐近锥，见图 15.7.11.

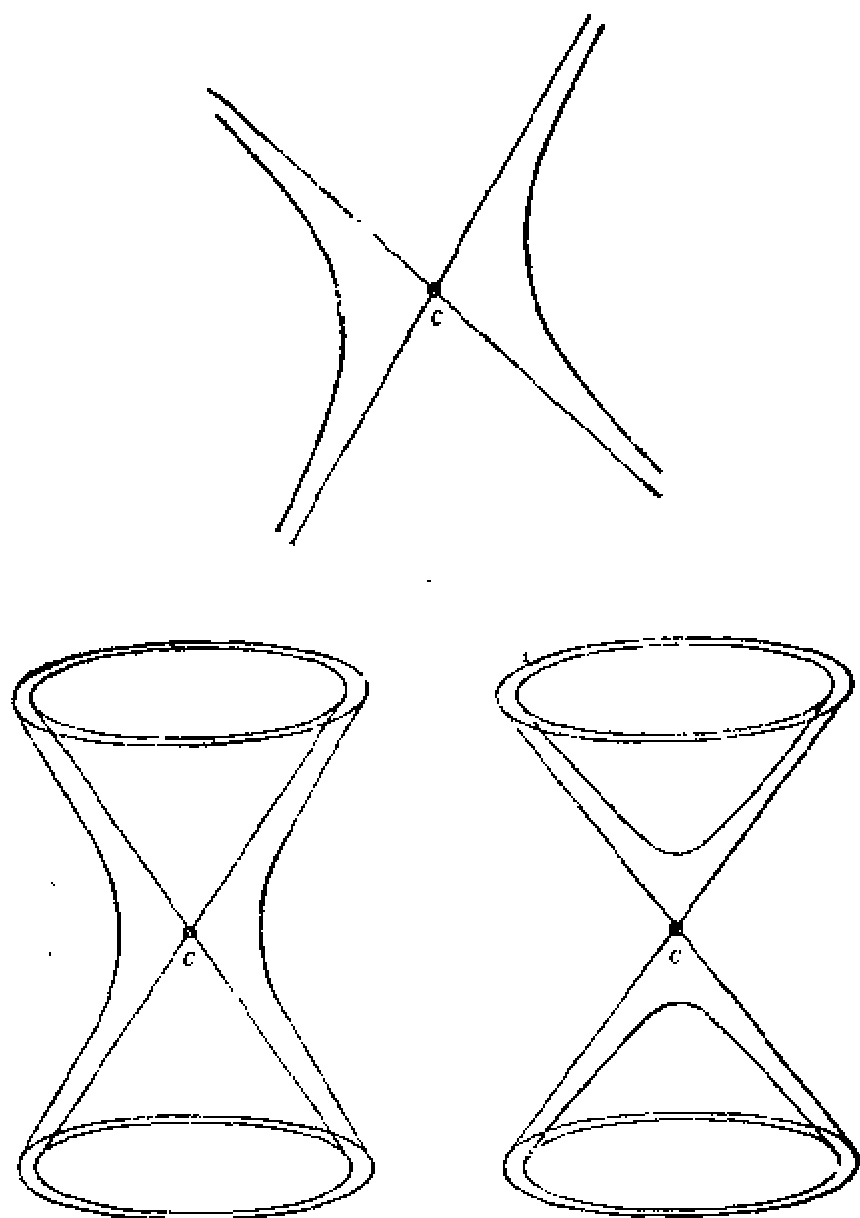


图 15.5.11.

15.6 欧氏仿射二次超曲面

15.6.1 分类. 若 X 是欧氏仿射空间，则必须在 $\mathrm{Is}(X)$ 的作用下，而不是在 $GA(X)$ 的作用下，对 X 的正常仿射二次超曲面作出分类. 利用 13.5.5 以及 15.3 的技巧，我们总可找到一个标准正交标架，使 α 的方程有以下形式:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{n} a_i x_i^2 + 1 \text{ 或 } \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{n-1} a_i x_i^2 + 2x_n,$$

$$\text{其中 } a_i > 0\ \forall_i.$$

这种类型的方程被称为既约的,见 15.7.10.若要得到完全的分类,也就是使不同方程对应于不同轨道,只需加上条件 $a_i \leqslant a_j \forall\ i<j$, $i, j=1,\cdots,r$ 及 $\forall i<j,\ i, j=r+1,\cdots,n-1$ 或 n.

15.6.2 第 17 章我们将详细地研究欧氏圆锥曲线. 在任意维数的情形, 我们只限于以下的不变量的研究. 关于其它结果可参看[EE].

15.6.3 我们把 H(0, n) 类型的二次超曲面称为仿射空间 **X** 的椭球面,即它是形如 $\mathscr{E}=\mathscr{E}(q)=\{x\in X: q(x)=1\}$ 的,其中

$$q\in Q(X_a)$$

是正定二次型, $a\in X$ (见 15.3.2). 若 X_a 的一个基 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 使 q 写成 $\sum_i x_i^2$, 即 $\{m_i\}$ 是 q 的标准正交基(见 13.3.1), 则称 $\{m_i\}$ 是关于 q 的共轭集.

现在再假定 X 是欧氏空间, 有一个任意的欧氏结构 (与 q 无关!),且如 8.11.5 那样把 X_a 的一个向量集的 Gram 行列式记为 Gram $(\cdot,\cdots,\cdot)$,则:

15.6.4 Appolonius 定理. 对欧氏空间 X 的每一椭球面都可联系一些纯量 $A(\mathscr{E}, k)$ $(k=1,\cdots,n)$, 使得对于$\mathscr{E}$的任意共轭集 $\{m_i\}$, 有

$$A(\mathscr{E}, k)=\sum_{i_1<\cdots<i_k} \operatorname{Gram}(m_{i_1},\cdots,m_{i_k}).$$

15.6.5 $A(\mathscr{E}, k)$ 的计算. 根据 13.5.5, 存在关于欧氏结构$\|\cdot\|^2$的标准正交基, 它关于 q 又是正交的. 设在这个基 $\{e_i\}$ 之下 $q=\sum_i \lambda_i x_i^2$, 则集合 $\left\{m_i=\dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$ 关于 $\mathscr{E}=\mathscr{E}(q)$ 是共轭的. 显然

$$\operatorname{Gram}(m_{i_1},\cdots,m_{i_k})=\|m_{i_1}\|^2\cdot\cdots\cdot\|m_{i_k}\|^2=\lambda_{i_1}^{-1}\cdots\lambda_{i_k}^{-1},$$

从而

$$A(\mathscr{E}, k) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \lambda_{i_1}^{-1} \cdots \lambda_{i_k}^{-1} (k = 1, \cdots, n).$$

15.6.6 例. 对任意的 n，8.11.6 表明 $A(\mathscr{E}, n)$ 是在 a 及 m_i 上构造的平行六面体的体积（见 9.12.4.2），这个体积是常量（也见 11.8.9.4）. 这一结果并不以 X 上的欧氏结构作为必要条件，见 2.7.4. 它只是以几何方式表达了以下事实：若 $f \in O(q)$，则 $|\det f| = 1$；见 13.6.2.

对任意的 n 及 $k = 1$：$A(\mathscr{E}, 1) = \sum_{i=1}^{n} \|m_i\|^2$. 因此对关于一组标准正交基的平面椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$，我们总有 $\|m_1\|^2 + \|m_2\|^2 = a^2 + b^2$ 及阴影部分的面积 $= ab$. 这就是原始的 Appolonius 定理.

对 $n = 3$，$k = 2$，将有(见 8.11.8)

$$A(\mathscr{E}, 2) = \|m_1 \wedge m_2\|^2 + \|m_2 \wedge m_3\|^2 + \|m_3 \wedge m_1\|^2,$$

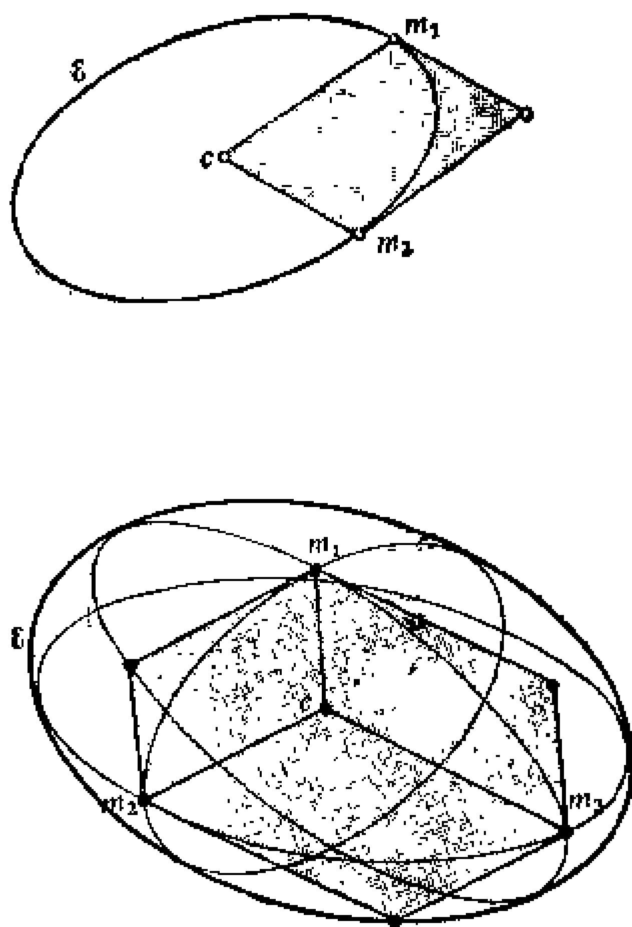


图 15.6.6.

即在$\mathscr{E}$的共轭集 $\{m_1, m_2, m_3\}$ 上作出的三个平行四边形的面积之和是常量.

15.6.7 证明. 对于 $\mathscr{E}=q^{-1}(1)$ 取定一个共轭集 $\{m_i\}$ 并设二次型$\|\cdot\|^2$关于这个基的矩阵是 B. 对于另一个共轭集 $\{m'_i\}$，根据 13.1.3.8 及 13.6.5，$\|\cdot\|^2$的矩阵 B' 将是 $B'={}^tSBS$，其中 ${}^tSS=I$. 因此 $B'=S^{-1}BS$ 与 B 相似，从而有

$$\det(B'+\lambda I)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k A(\mathscr{E},k)=\det(B+\lambda I),$$

这里的 $A(\mathscr{E},k)$ 仅依赖于 A，即仅依赖于$\mathscr{E}$，但根据线性代数可知

$$\det(B'+\lambda I)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_k}M'_{i_1\cdots i_k}\Big),$$

这里的 $M'_{i_1\cdots i_k}$ 是由使

$$i,\ j=i_1,\cdots,\ i_k$$

的 b'_{ij} 所构成的矩阵的行列式. 但由 13.1.3.6 中 B' 的定义可知 $b'_{ij}=(m'_i|m'_j)$，从而

$$M'_{i_1\cdots i_k}=\mathrm{Gram}(m_{i_1},\cdots,m_{i_k}).$$

15.6.8 轴. 15.6.1表明欧氏仿射空间的正常二次超曲面的象具有对称轴. 若它是第 II 类型的，这个对称就是关于n个坐标超平面的超平面对称 $x_i\longmapsto -x_i$（其它的 x_j 不动），若是第 III 类型的，则要除去对称 $x_n\longmapsto -x_n$.

15.7 练　　习

15.7.1 研究对仿射二次超曲面的"零点定理".

15.7.2 当$n=2$或 3，$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时研究退化仿射二次超曲面的性质.

15.7.3 研究退化二次超曲面的中心及直径.

15.7.4 对任意仿射二次超曲面定义配极变换. 证明此时第 I, II, III 类型可刻划为:

第 I 类型：$\infty_{\frac{1}{X}}\cap\mathrm{im}(\alpha)\neq\emptyset$；

第 II 类型：$\infty_{\frac{1}{X}}\cap X\neq\emptyset$，$\infty_{\frac{1}{X}}\cap\mathrm{im}(\alpha)=\emptyset$；

第 III 类型：$\infty_{\frac{1}{X}}\cap X=\emptyset$.

用几何方法证明 15.2.2.

15.7.5 研究仿射圆锥曲线的平行于已知方向的弦的中点的轨迹.

15.7.6 设 $C=\mathrm{im}(\alpha)$ 是正常平面圆锥曲线的非空象，m 是平面的一点，$\langle m, a\rangle$，$\langle m, b\rangle$ 是 C 的两条不同切线，过 m 且与 C 切

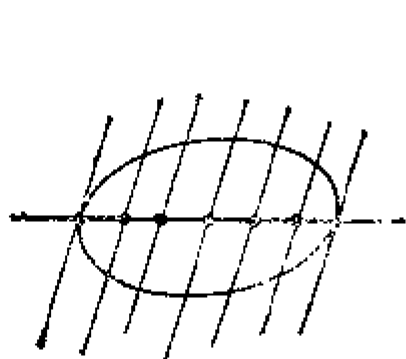


图15.7.5

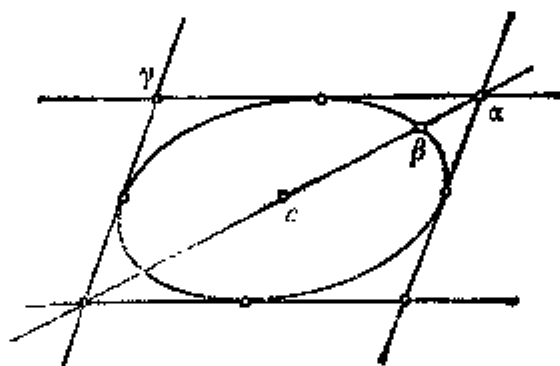
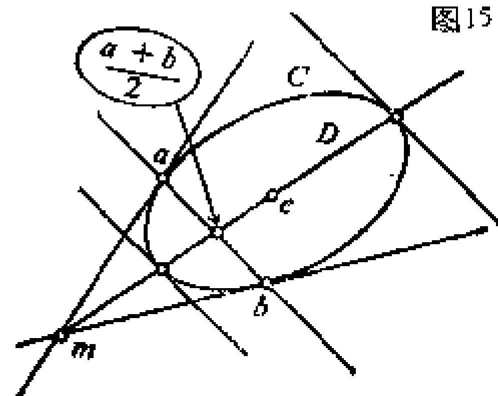


图15.7.7.



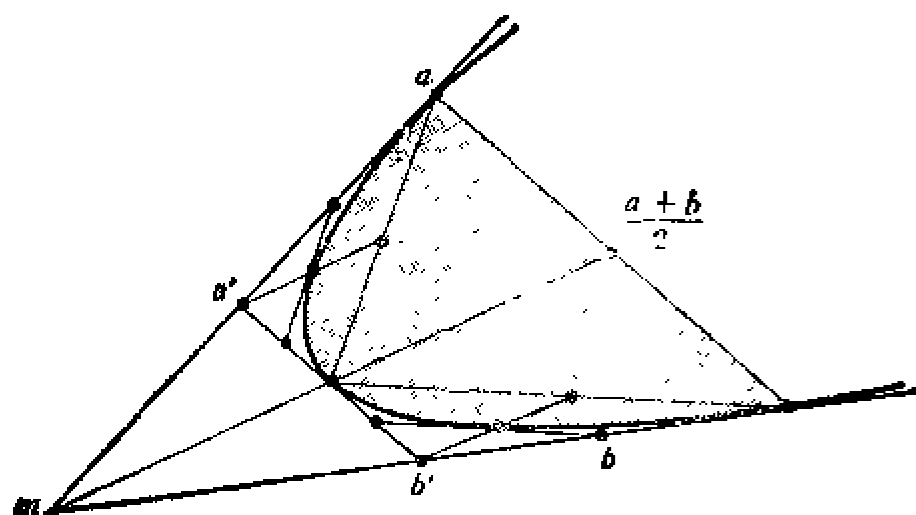


图 15.7.6.

于 a 及 b. 证明直线 $D=\left\langle m, \frac{a+b}{2}\right\rangle$ 是 α 的一条直径，而且 α 在 $C\cap D$ 处的切线都与 $\langle a, b\rangle$ 平行. 若 α 是抛物线，证明 D 总是与 C 相交于 m 和 $\frac{a+b}{2}$ 的中点. 这样当已知抛物线的两点以及在这两点上的切线后，由上面的性质即可用几何作图法作出抛物线弧上一系列点.

注意到图 15.7.6 中三角形 $\{m, a', b'\}$ 的面积是三角形 $\{m, a, b\}$ 的 1/4，根据这一事实，应用 Archimède 的极限方法推导出阴影部分的面积等于 $\{m, a, b\}$ 的面积的 2/3. 再用积分学证明这一结论.

15.7.7 证明存在椭圆的外切平行四边形，而且其中一个切点可任意选取. 对于图 15.7.7 的点 α, β, 证明总有 $\overrightarrow{c\alpha}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{c\beta}$. 对于同图中的点 α, γ, 证明方向 $\overrightarrow{c\alpha}$, $\overrightarrow{c\gamma}$ 关于 α 共轭.

15.7.8 证明 15.6.1 的细节.

15.7.9 设 Q 是三维欧氏仿射空间的有心正常二次曲面的象，x 是一个固定点，$x\notin Q$. 通过 x 作三条两两正交的直线 D, E, F, 使 D 截 Q 于 a, b, E 截 Q 于 c, d, F 截 Q 于 e, f. 证明和式

$$\frac{1}{\overline{xa}\cdot\overline{xb}}+\frac{1}{\overline{xc}\cdot\overline{xd}}+\frac{1}{\overline{xe}\cdot\overline{xf}}$$

是常数. 给出例子及推广.

通过 x 再作三条直线 D, E, F, 使它们的方向关于 Q 两两共轭，且 D 截 Q 于 a, b, E 截 Q 于 c, d, F 截 Q 于 e, f. 证明和式

$$\overline{xa}\cdot\overline{xb}+\overline{xc}\cdot\overline{xd}+\overline{xe}\cdot\overline{xf}$$

是常数. 给出例子及推广. 也参见 17.9.12.

15.7.10 对于 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中下列方程的二次曲线(面)，找出标准正交的仿射标架使得新方程具有 15.6.1 中所述的类型. 找出这些新方程以及所得二次曲线(面)的性质. 此外再给出它们可能有的轴及渐近线. 如果方程中含有参数，则所得的结果要根据参数的

取值加以讨论.

$$yz+zx+xy+\lambda(x+y+z)+\mu=0,$$

$$4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy+4y+8z+\lambda=0,$$

$$x^2+(2\lambda^2+1)(y^2+z^2)-2(yz+zx+xy)+2\lambda^3-3\lambda^2+1=0,$$

$$(\mu z-\nu y)^2+(\nu x-\lambda z)^2+(\lambda y-\mu x)^2=1,$$

$$4x^2+9y^2+z^2+6yz+4zx+12xy+2x+3y+\lambda z+\mu=0,$$

$$x^2+2\lambda xy+y^2-ax-by=0,$$

$$x^2+\lambda(\lambda+1)xy+\lambda^2y(y-a)=0,$$

$$\alpha x^2-2xy+\beta y^2-2\beta x-2\alpha y=0,$$

$$(\alpha-1)x^2+2\beta xy-(\alpha+1)y^2+2\alpha x+2\beta y-(\alpha+1)=0.$$

15.7.11 对实仿射平面的双曲线,证明 15.5.11 引入的渐近线概念与通过参数曲线定义的概念一致.

15.7.12 证明若一个严格的平行四边形内接于圆锥曲线，则它的中心是这个圆锥曲线的中心.

15.7.13 **切距球面.** 设Q是三维欧氏仿射空间的有心二次曲面. 证明外切于Q的直三面角的顶点轨迹是一个球面，称为Q的切距球面. 当Q是抛物面时，它变成什么样子?

证明调和外切于Q的球面（见14.5.4.4）就是正交于切距球面的球面.

证明二次曲面的一个切面束的切距球面构成一个球面束.

试与 17.4.2.3，17.6.1 及 17.9.5 比较.

15.7.14 设Q是三维欧氏仿射空间的二次曲面，研究Q的圆口截面,即在Q上截得一个圆的平面,以及所截得的圆.（利用 14.1.3.7 及 17.4.2，我们能够研究在欧氏仿射空间的射影完备化空间的复化空间的无穷远平面内发生些什么. 我们也研究切Q于两个不同点的球面以及它们与Q的交.）

15.7.15 设Q是三维欧氏仿射空间的二次曲面，m是一个点. 证明Q的过m的法线“一般说来”是6条. 证明所有过m的法线在Q上的垂足都包含在一个二次锥面内，其顶点是 m，并包含Q的中心以及Q的轴的过m的平行线. 试与 17.5.5.6 比较.

15.7.16 详细证明在三维欧氏空间里如何用细线制作各种二次曲面，参看 17.2.2.5 及 17.6.4.

15.7.17 **同焦二次曲面.** 在 $\mathbf{R}^3$ 内考虑方程为

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0,\ a>b>c,$$

的二次曲面族 $Q(\lambda)$. 研究过定点 (x_0, y_0, z_0) 可通过多少个 $Q(\lambda)$. 证明当有三个 $Q(\lambda)$ 通过同一个点时，它们在这一点的切平面是两两正交的(见 17.6.3.3).

15.7.18 在一个仿射平面上有四个点，其中任意三点都不共线. 请用阴影标出具有下述性质的区域：由阴影区域中的点与四个已知点确定的圆锥曲线是椭圆.

15.7.19 找出使一个欧氏仿射二次超曲面保持稳定的所有欧氏对称(见 9.2.4).

15.7.20 设 $\mathscr{E}$ 是 n 维欧氏仿射空间的以 0 为中心的椭球面. 考虑 $\mathscr{E}$ 内使向量 $\overrightarrow{0a_i}$ 两两正交的点集 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,n}$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(0a_i)^2}$$

是一个常数.

由此推导出包含这些 a_i 的超平面的包络(见 10.13.12). 利用以 0 为中心的球面的配极变换重新证明 15.7.13.

第 16 章 射影圆锥曲线

自从古希腊时代以来，特别是经过了 19 世纪几何学家的发展，圆锥曲线已成为大量研究工作的对象，因而在这方面的成果是为数可观的；[EE] 中对这些成果作了系统的阐述．在多少带点古典意味的结果中，我们选了关于圆锥曲线内接和外切多边形的 Poncelet 定理作为本书的一个较难的定理；在我们看来，这是关于圆锥曲线的最漂亮的结果(第 16.6 节)．

在二次超曲面中间，圆锥曲线具有两个突出的优点：第一，可用射影直线来参数化，从而引出圆锥曲线上的交比和单应的概念(第 16.2 和 16.3 节)，第二，两个圆锥曲线的相交理论使我们有可能得出 Bezout 定理，并对圆锥曲线束作充分的研究(第 16.4 和 16.5 节)．

> 本章中，$P=P(E)$ 是特征数不为 2 的域K上的射影平面；$P^*=P(E^*)$．我们常将一点 $m\in P$ 和m的射影坐标，即三元数组 (x, y, z) 等同起来．$ab=\langle a, b\rangle$ 表示连接点 a 和点 $b(a\neq b)$ 的射影直线(参见 16.1.2)．
>
> 通常总已取定一条圆锥曲线 $\alpha\in \mathrm{PQ}(E)$，常用 $C=\mathrm{im}(\alpha)$表示 α 的象，q 表示 α 的方程．但在第 16.7 节中，α 和 q 是就仿射平面 X 上的圆锥曲线而言的．

16.1 复习，记法及补充

16.1.1 根据 14.1.3.2 和 14.1.7.1，或者 α 是正常的，或者 α 的象 C 仅含一点、一条直线或两条直线．

16.1.2 **约定**．设已给定一条正常圆锥曲线(或是这么指明的，或是并没指明但容易看出的)，且 a，b 是 $\mathrm{im}(\alpha)=C$ 上已知的两

点，则在 $a \neq b$ 时记号ab表示射影直线 $\langle a, b\rangle = ab$，而在 $a = b$ 时，aa 表示 α 在 a 的切线(参见 14.1.3.5)．在用了这一约定而得出的那些结论中（例如 16.2.2，16.2.11)，我们让读者自己去验证所得的结论确实是成立的;其中一般性的理由见 14.1.3.2.

16.1.3　记法． 对于 P 的齐次坐标 (x, y, z)，习惯上将 α 的矩阵 A 和 α 的一个方程写成下面的形式:

16.1.3.1

$$q = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{pmatrix}.$$

将 P 在齐次坐标下的射影标架记为 p, q, r, s，即 $p = (1, 0, 0)$，$q = (0, 1, 0)$，$r = (0, 0, 1)$，$s = (1, 1, 1)$(参见 4.4)．于是:

16.1.3.2　三角形 $\{p, q, r\}$ 关于 α 是自配极的充要条件是 $b = b' = b'' = 0$（参见 14.5.4)．三角形 $\{p, q, r\}$ 内接于 C 的充要条件是 $a = a' = a'' = 0$；另外，$s \in C$ 的充要条件是 $b + b' + b'' = 0$．要使 $q, r \in C$ 而且 pq，pr 相切于 C，必须且只须 α 的方程形如 $ax^2 + 2byz$；另外，$s \in C$ 等价于 α 的方程形如 $a(x^2 - yz)$（要用到 14.5.3)．

以上结论使我们可以在圆锥曲线的情形下更详尽地讨论 14.1.6 和 14.2.4 中的内容:

16.1.4　命题． 经过内中任意三点都不共线的、P 上的五点，有且仅有一条正常圆锥曲线．对任意域 K，设 α 和 β 是两条圆锥曲线，使得 $\mathrm{im}(\alpha)$ 非空且不退化为一点；则从 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ 必有 $\alpha = \beta$.

根据 4.6.8，可取前四点构成的射影标架：$\{p, q, r, s\}$；根据 16.1.3.2，当 C 包含这四点时，α 的方程必定有下面的形式:

$$by(z - x) + b'x(z - y).$$

设 $(x_0, y_0, z_0) = t$ 是已给的第五点，则它不在直线 pq，qr，rp，ps，qs，rs 上蕴含着 x_0，y_0，z_0 各不相同且都不为零，因而 by_0

$(z_0 - x_0) + b'x_0(z_0 - y_0) = 0$ 在$\widetilde{K}$中有唯一解 $(\overline{b}, \overrightarrow{b'})$，而且 $bb' \neq 0$，$b + b' \neq 0$；因而圆锥曲线

$$byz + b'zx + b''xy$$

是正常的，这是因为 $\det A = bb'b'' \neq 0$。

现在设 α, β 使 $\operatorname{im}(\alpha) = \operatorname{im}(\beta)$；首先假定 α 退化，则根据 14.1.3，14.1.7.1 和假设条件，由 $\operatorname{im}(\alpha) = \operatorname{im}(\beta)$ 就可推出 $\alpha = \beta$. 若 α 是正常的，$k = \# K > 3$ 且 $C \neq \emptyset$，则 $\# C \geqslant 5$；事实上，若 $a \in C$，则 P 上经过 a 的直线数目为 $k + 1 > 4$，其中不与 C 相切的数目 >3，都与 C 交于 a 以外的一点. 由定理的第一部分，我们就得出所需结论. 剩下的是 $\# K = 3$ 的情形；上述结果表明 C 至少包含四点. 如果我们取这四点构成射影标架，由前段可知当 α 正常时，α 的方程必为 $b(xy + yz + zx)$.

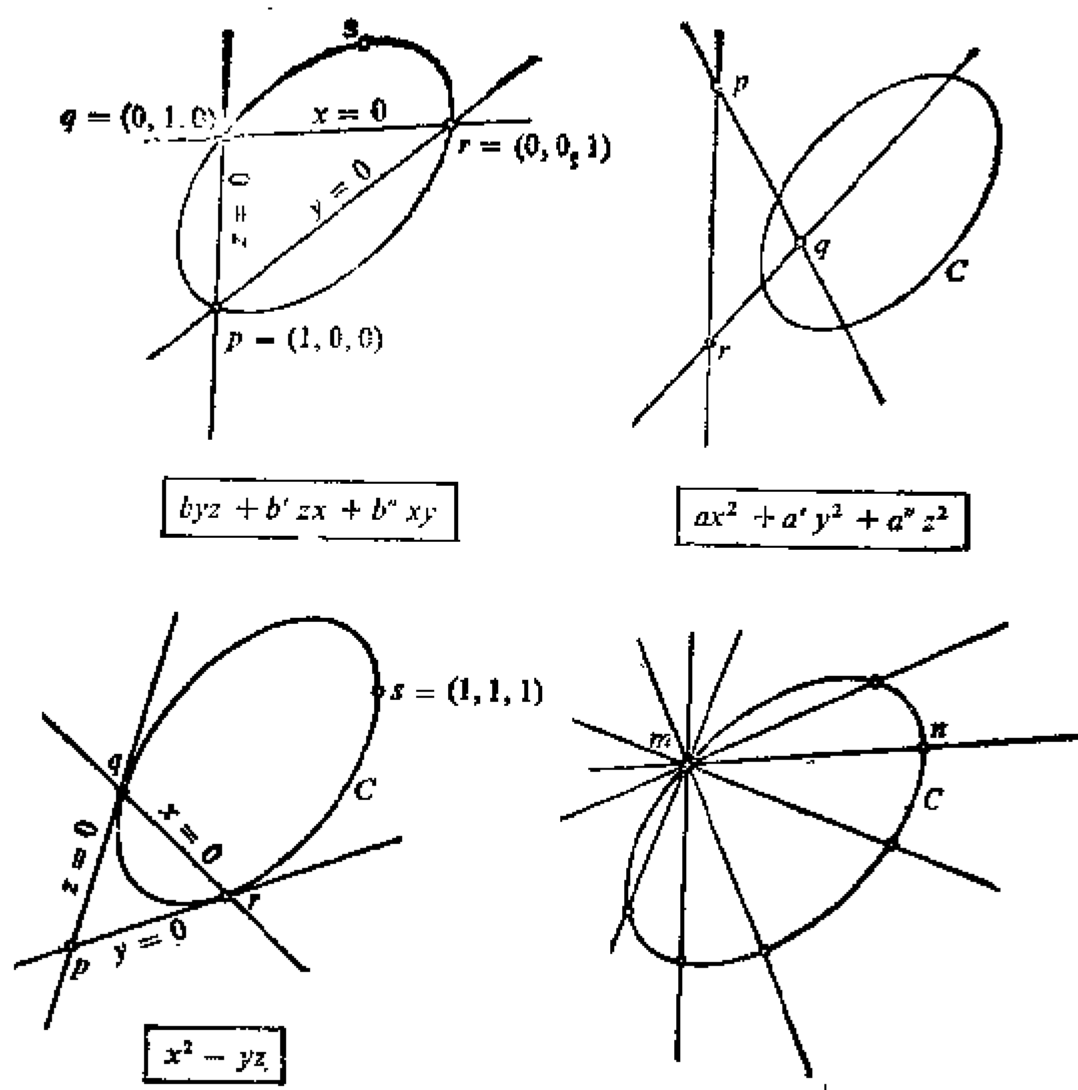


图 16.1.4.

16.2 良好参数化映射，四点的交比，Pascal 定理

16.2.1 上述内容启发我们将每条经过 $m\in C$ 的直线 D 跟点 $D\cap C$ 联系起来．更精确地说：对 $m\in P$，用 m^* 来记 P 上含 m 的所有直线构成的 P^* 的直线(参见 4.1.3.5)．设 $m\in C$，当 α 正常时，置(利用 16.1.2)：

16.2.2 $\pi_m: C=\operatorname{im}(\alpha)\ni n\longmapsto mn\in m^*$.

16.2.3 命题． 对每一 $m\in C$，π_m 是一个双射．对任何 $m,n\in C$，$\pi_n\circ\pi_m^{-1}: m^*\to n^*$ 是一个单应．反过来，若 m,n 是 P 的不同的两点，且 $f: m^*\to n^*$ 是单应，则存在一条 P 上的圆锥曲线 α，使得 $\operatorname{im}(\alpha)=\{D\cap f(D): D\in m^*\}$；这条圆锥曲线经过 m 和 n．这条圆锥曲线退化的充要条件是 $f(mn)=mn$；这时它由 mn 和另一

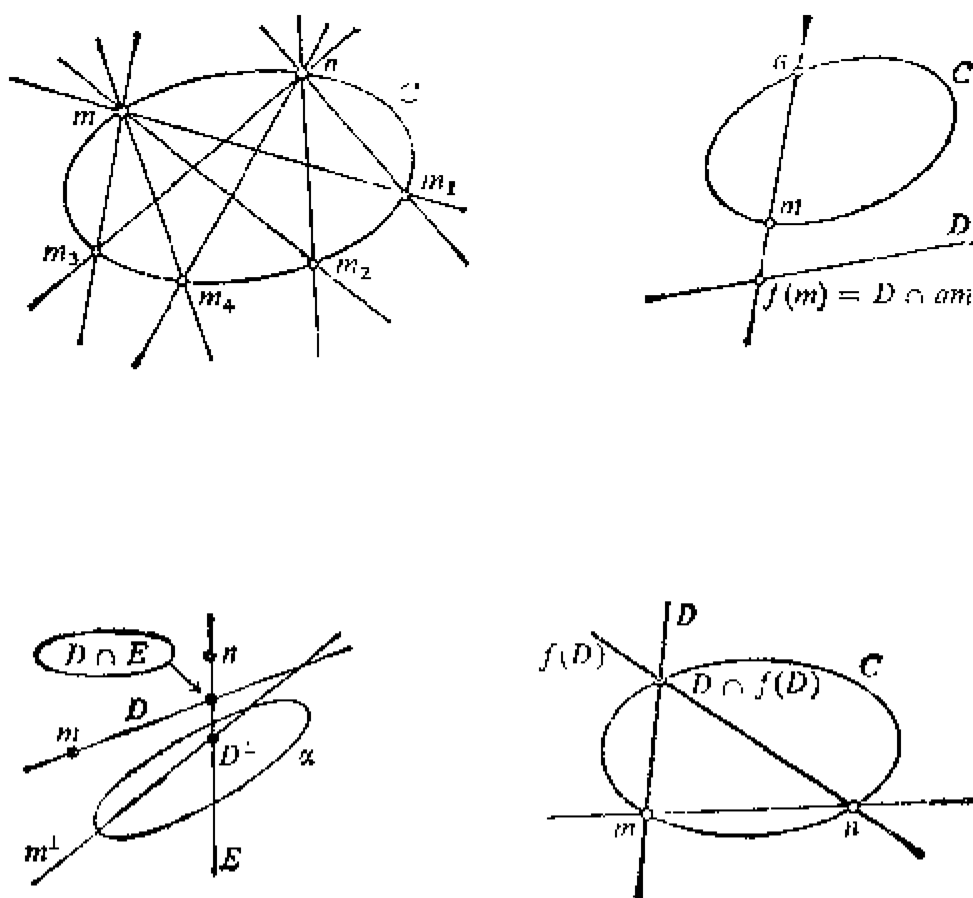


图 16.2.3

条直线组成。

由 14.1.3.2 和 14.1.3.5 就可得出双射的结论．现在如果 m，$n\in C$，取射影标架使 $m=(0,1,0)$，$n=(0,0,1)$，而且 α 的方程为 x^2-yz，根据 16.1.3.2 这总是可以做到的．于是 m^* 由方程为 $\lambda x+\mu z=0$ 的直线 D 构成，n^* 由方程为 $\lambda' x+\mu' y=0$ 的直线 D' 构成；因而 $D\cap D'\in C$ 等价于 $\lambda\lambda'=\mu\mu'$，这是 $(\lambda,\mu)\in\widetilde{K}$ 和 $(\lambda',\mu')\in\widetilde{K}$ 之间的一个单应．

反过来，首先假定 $f(mn)=mn$；则结论在 6.5.9 中已经证得．否则，对 m，n 和 $D_i\cap f(D_i)$ $(i=1,2,3)$ 这五点应用 16.1.4，其中 D_i 是各不相同且异于 mn 的，即可．

16.2.4 推论． 若 $K=\mathbf{C}$ 且 α 正常，则 $\operatorname{im}(\alpha)$ 与 $P^1(\mathbf{C})$ 同胚；若 $K=\mathbf{R}$，α 正常且有非空象集，则 $\operatorname{im}(\alpha)$ 同胚于 $P^1(\mathbf{R})$．

在前面所取的标架下，可以看到 π_m^{-1} 恒同于映射 $\widetilde{K}\ni(\lambda,\mu)\longmapsto(\lambda\mu,-\mu^2,-\lambda^2)\in P$，$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时，这是连续映射．

16.2.5 命题． 设 α 是有非空象 C 的正常圆锥曲线，m_i $(i=1,2,3,4)$ 是 C 上四点，其中至多有两点是相同的；则四条直线 mm_i 的交比 $[mm_i]$（参见 6.5 和 16.1.2）与点 $m\in C$ 无关．把它称为 C 上四点 m_i 的**交比**，记为 $[m_i]$ 或 $[m_i]_C$．其实，若有三点重合，仍是可以定义的，因为这时它们是调和分割的，将这一交比记为 $[m_i]=-1$（参见 6.4）．

命题由 16.1.4 和 6.1.4 即可证得．

应用 6.5，我们还可以有以下结论：

16.2.6 设 α 正常，$a\in C$，D 是一条直线且 $a\notin D$；则 $C\ni m\longmapsto am\cap D\in D$ 是一个双射而且保持交比．一个例子就是 $n=1$，$K=\mathbf{R}$ 或 $n=2$，$K=\mathbf{C}$ 时的球极投影：参见 18.1.4，18.10.7、20.6．

16.2.7 例

16.2.7.1 设 α 是一条正常圆锥曲线，m，n 是 P 上不同的两点，则集 $\{D\cap E$：直线 $D\ni m$，直线 $E\ni n$，$D\perp E\}$ 是圆锥曲线的象集而且包含 m 和 n．

事实上，由 14.5 就有 $E = nD^{\perp}$；而 $m^* \ni D \longmapsto D^{\perp} \in m^{\perp}$ 是一个单应，它使 $m^{\perp} \ni x \longmapsto nx \in n^*$，所以由 16.2.3 的最后一段即可证明命题.

一个这样的几何轨迹的例子是欧氏空间中圆锥曲线的切距圆，见 17.4.2.3.

16.2.7.2 根据对偶原理，由 16.2.3 即可推得：若 $f: D \to E$ 是 P 上两直线间的单应，则当 m 取遍 D 上的点时，直线 $\langle m, f(m)\rangle$ 包络出 P 上一条与 D 和 E 相切的圆锥曲线. 这个结果的一种很特殊的情形是 9.6.7.1.

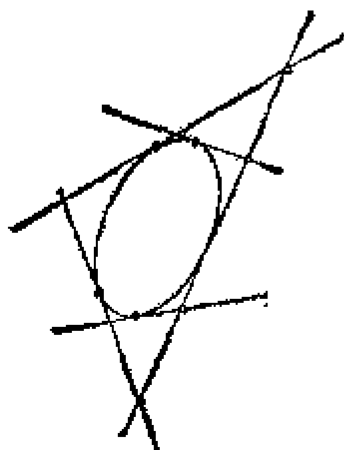


图 16.2.7.

16.2.7.3 由 14.6.1 可推得：若 α 是正常圆锥曲线且象集非空，则可以用两种等价的方式定义 α 的四条切线的交比，或者是作为四个切点的交比，或者是作为任一切线与这四条切线的四个交点的交比.

16.2.7.4 一个漂亮的应用是可容已知角的弧，见 17.4.2.2.

16.2.8 **评注**. 根据 16.1.3.2，象集非空的正常圆锥曲线必有形如 $x^2 - yz$ 的方程；但这时映射 $K^2 \ni (\lambda, \mu) \longmapsto (\lambda\mu, \lambda^2, \mu^2) \in E$ 在商空间上诱导出 $f: \tilde{K} \to C$，它是双射，而且保持交比——其实这是 16.2.3 中证明的一个应用. 更一般地，我们有下面的命题.

16.2.9 **命题**. 每一保持交比的双射 $f: \tilde{K} \to C$ 称为象集非空的正常圆锥曲线的*良好参数化映射*. 对任一良好参数化映射，总存在 $g \in \mathscr{P}_2^\bullet(K^2; E)$（参见 3.3.1）使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \tilde{K} & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

即 $f \circ p = p \circ g$；而且在不计相差 K^* 中一个纯量的情况下，这样的 g 是唯一的. 反过来，设 $g \in \mathscr{P}_2^\bullet(K^2; E)$ 而 $f: \tilde{K} \to P$ 是在商空

间上的诱导映射;那么,如果 f 是单射,其象 $f(\widetilde{K})=C$ 就是一个正常圆锥曲线的象集,而且 f 是一个良好参数化映射. 而对任意两个 C 上的良好参数化映射 $f, g:\widetilde{K}\to C$, 总有

$$g^{-1}\circ f\in \mathrm{GP}(\widetilde{K}).$$

最后一个结论由定义和 6.1.4 即可得出. 给定 f 后, g 的存在性可由我们已经碰到过的 $g:(\lambda,\mu)\longmapsto(\lambda^2,\lambda\mu,\mu^2)$ 的存在性导出; 唯一性是显然的, 由 $\mathscr{P}_2^*$ 的定义即可看出. 为证明反过来的结论,记

$$x=u\lambda^2+u'\lambda\mu+u''\mu^2,$$
$$y=v\lambda^2+v'\lambda\mu+v''\mu^2,$$
$$z=w\lambda^2+w'\lambda\mu+w''\mu^2;$$

我们先证行列式

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}\neq 0.$$

如若不然,就有一个形如

$$(\lambda,\mu)\longmapsto(a\lambda^2+b\lambda\mu+c\mu^2,\ a'\lambda^2+b'\lambda\mu+c'\mu^2)$$

的映射, 我们留给读者证明: 这时只要 $\#K\geqslant 3$, 商空间上的诱导映射 $\widetilde{K}\to\widetilde{K}$ 是不可能为单射的.

由此即可推得: 存在线性无关的 $\varphi,\eta,\zeta\in E^*$ 使 $\lambda^2=\varphi(x,y,z)$, $\lambda\mu=\eta(x,y,z)$, $\mu^2=\zeta(x,y,z)$. 因而 $f(\widetilde{K})$ 是以方程为 $\eta^2-\varphi\zeta=0$ 的圆锥曲线作为象集的; 这条圆锥曲线是正常的,因为 φ,η,ζ 都是线性无关的. 最后, f 还是一个良好参数化映射,因为在不计可能相差 $\widetilde{K}$ 和 P 中的单应的情形下,我们有

$$(\lambda,\mu)\longmapsto(\lambda^2,\lambda\mu,\mu^2),$$

由 16.2.8 可知它确实是良好参数化映射.

16.2.10 注. 这里, 我们就圆锥曲线而言涉及到了一个关于有理曲线的一般定理的特殊情形, 那就是 Lüroth 定理, 但这个定理只在 K 是代数闭域时才成立. 例如可参见 [WK], 第 149—151 页.

16.2.11 Pascal 定理. 设 C 是一条正常圆锥曲线的象，a, b, c, d, e, f 是 C 上六点，其中至多只有三对点是重合的(参见 16.1.2)，则 $ab\cap de$, $bc\cap ef$, $cd\cap fa$ 共线.

令 $x=bc\cap ed$, $y=cd\cap ef$, $z=ab\cap de$, $t=af\cap dc$；由 16.2.5 和 6.5.2 就有:

$$[z, x, d, e]=[ba, bc, bd, be]$$
$$=[fa, fc, fd, fe]=[t, c, d, y],$$

于是由6.5.8可知 zt, xc, ey 三线共点.

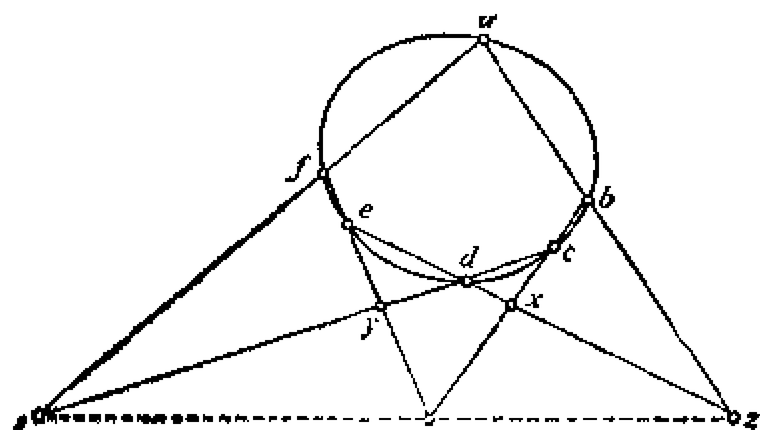


图 16.2.11.

16.2.12 我们注意到，当 C 由两条直线组成时，Pascal 定理就是 Pappus 定理，参见 5.4.1. 我们好象还不知道 Pascal 是怎样对圆来证明他的定理的；但我们却知道，他是通过投影从圆过渡到圆锥曲线的情形的，参见 17.1.5. 关于“神秘六点形”的其它证明和性质，可见 16.8.3, 16.8.4, 16.8.5. 16.2.11 的逆命题是显而易见的，只要注意到一条直线与一条圆锥曲线至多交于两点. 这一点我们在 16.3.3, 16.7.3 中都将用到. 由 14.6 可以推出:

16.2.13 推论 (Brianchon). 若一个六边形外切于一条正常圆锥曲线，则它的三条对角线共点.

Pascal 和 Brianchon 的结论对退化的情形也适用(参见 16.1.2)，在图 16.2.13 中我们画了两种情形，其中一种是极限情形.

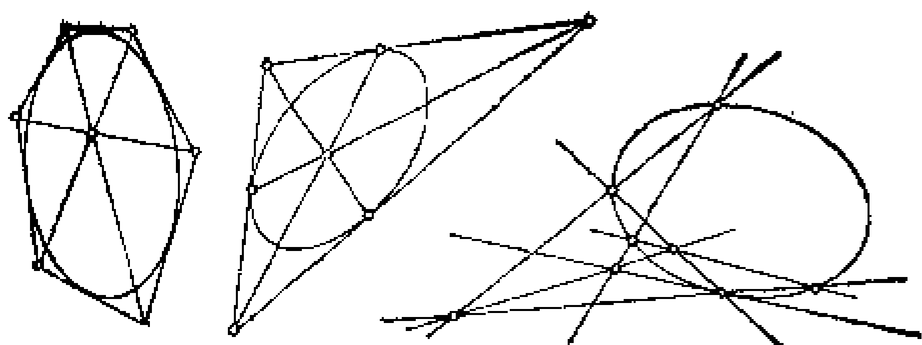


图 16.2.13.

16.2.14 设 α 正常，$(m_i)_{i=1,2,3,4}\subset C$，则对 $f\in \mathrm{GP}(P)$ 有

$$[f(m_i)]_{f(C)}=[m_i]_C.$$

16.3 圆锥曲线的单应和单应群. 应用

本节中 α 是正常圆锥曲线且象集 C 非空.

16.3.1 定义. C 的任一保持交比的双射称为 α 的或 C 的**单应**；若 $f^2=\mathrm{Id}_C$ 且 $f\neq \mathrm{Id}_C$，则称 f 是一个对合. α 的单应群记为 $\mathrm{GP}(C)$ 或 $\mathrm{GP}(\alpha)$.

16.3.2 根据16.2，若 $a\in C$，则 $f\in \mathrm{GP}(C)$ 等价于

$$\pi_a\circ f\circ\pi_a^{-1}\in \mathrm{GP}(a^*);$$

对任一良好参数化映射也有同样的结论. C的对合与 6.7 意义下的对合是相应的. 例如，存在唯一的单应将 C 上已知三点映成指定的三点. 所以 $\mathrm{GP}(C)$ 恒同构于 $\mathrm{GP}(\tilde{K})$ (但同构的方式并不唯一)，因而也记为 $\mathrm{GP}(1;K)$.

我们也注意到，另外有一种找出 α 的单应的方法，其出发点是 16.2.14: 取 $f\in \mathrm{PO}(\alpha)$ (参见 14.7)；在 16.3.8 中我们很快就会看到，再没有其它的单应了. 暂时，我们来考虑将 C 的单应和整个 P 联系起来.

16.3.3 定理(单应轴定理). 设 $f\in \mathrm{GP}(C)$；则存在一条 P 上的直线Δ，使得只要 $m,n\in C$ 且 $m\neq n$，$m'=f(m)$，就有 $n'=$

$f(n) \Leftrightarrow m'n \cap mn' \in \Delta$. 称$\Delta$为$f$的轴. f的固定点就是 $\Delta \cap C$ 的点.

在遇有需要时,我们是不会忘记利用 16.1.2 的. 设 $(a_i)_{i=1,2,3,4,5}$ 是 C 上的点; 令 $a'_i = f(a_i)$, $s_{ij} = a_i a'_j \cap a'_i a_j$. 设 a_1, a_2, a_3 各不相同,又设Δ是直线 $s_{12}s_{13}$; 由 6.5.8 和 16.2.5 可知点 s_{14} 和 s_{15} 都属于Δ. 由 16.2.11 (以及它的逆命题,参见 16.2.12), 点 s_{45} 属于Δ(反之亦然).

16.3.4 评注. 若K是代数闭域,我们不用16.2.11,而直接从 6.5.8 出发来证明 16.3.3; 其实, $\Delta = s_{12}s_{13}$ 必与C相交, 且就交在f的固定点,因此Δ的特点就是它是连结这些点的直线(参见 16.1.2). 这样, 16.2.11 可以很简单地从16.3.3导出! 因此, 如果愿意的话, 就可以利用 K 的代数闭包和α在该闭包上的扩张. 值得注意的是,即使 $\operatorname{im}(\alpha) \neq \varnothing$, f 仍可能没有固定点,参见下图.

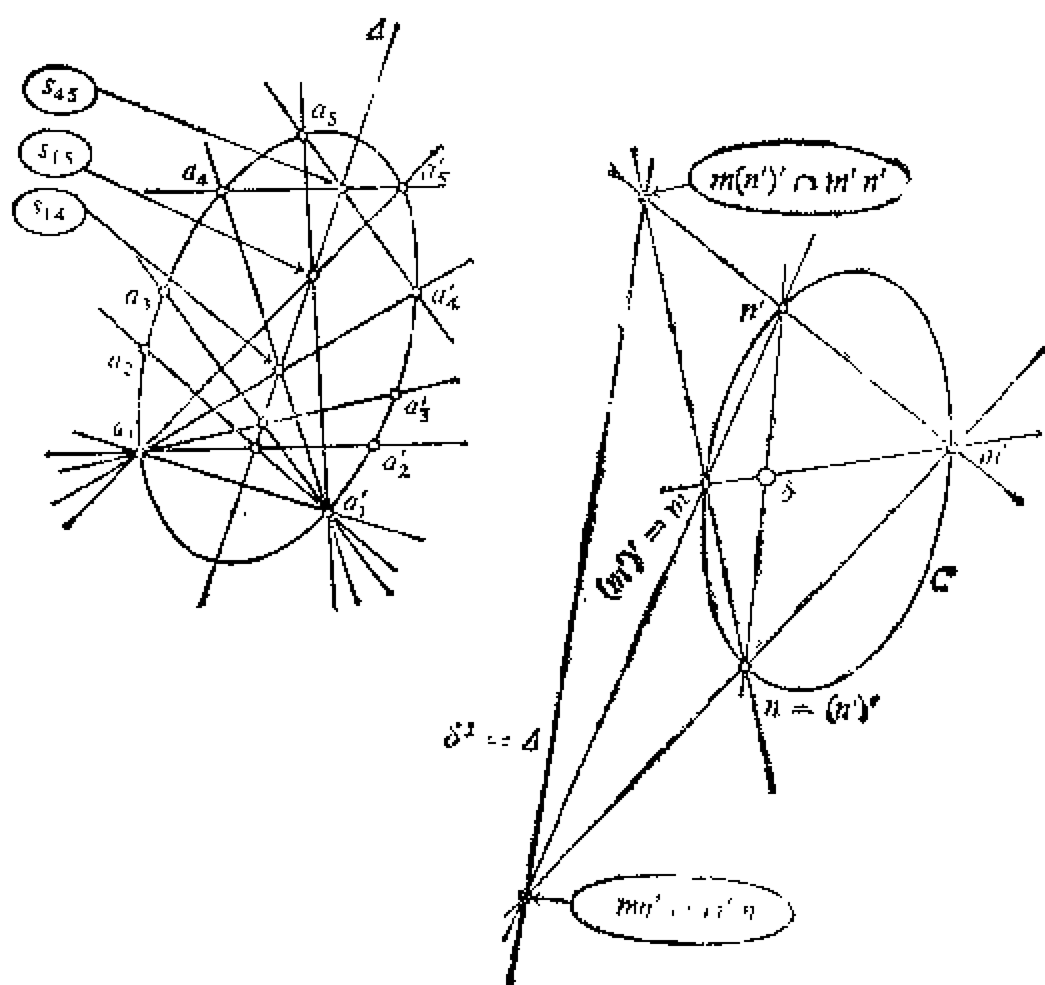


图 16.3.6.

16.3.5 例. 圆的旋转是单应；这可由 8.8.7.2 推出，我们在 17.4.2 中还会讨论这个问题．考虑对合的情形，就有下面的：

16.3.6 推论 (Frégier)．双射 $f\in \mathrm{GP}(C)$ 是对合的充要条件是存在 $\delta\in P\setminus C$ 使：

$$\forall m\in C:\{m, f(m)\}=C\cap \delta m \text{ (参见16.1.2)}.$$

点 δ 称为 f 的 Frégier 点；它是 f 的轴 Δ 的极点 $\Delta^{\perp}$．

必要性可由 14.5.2.6 得出(参见图 14.5.2)；充分性来自 6.7.4，它和 16.3.3 一起表明，根据 $\{m, f(m)\}=C\cap\delta m$ 的条件，δ 确实决定了一个对合．

16.3.6.1 问题. 若 $f\in \mathrm{GP}(C)$ 不再是对合，要问：当 m 跑遍 C 时，直线 $\langle m, f(m)\rangle$ 情形如何？回答可见 16.8.8．

16.3.7 例. 若 C 是欧氏平面上的圆，δ 是它的中心，$a\in C$ 是任意一点，则 δ 在 C 上所决定的对合就是对径点的对合；而 π_a 在 a^* 上所决定的对合就是正交直线的对合；我们在 16.3.10.2 和 17.5 中还会讨论这些问题．

现在我们可以回答 16.3.2 中提出的问题了：

16.3.8 命题. 限制 $\mathrm{PO}(\alpha)\ni g\longmapsto g|_C\in \mathrm{GP}(C)$ 是双射，因此 $\mathrm{GP}(C)$ 自然地同构于 $\mathrm{PO}(\alpha)$．

由 16.2.14 知道，$g|_C$ 确实在 $\mathrm{GP}(C)$ 中；C 至少包含构成一个射影标架的四点，由此即可得出单射性，参见 16.1.4 中的证明(若 $\# K=3$，则只有这四点！)．为证明满射性，我们先借助于 6.7.3 归结到对合的情形；但由 14.7.4 可知，Frégier 点 δ 和轴 $\Delta=\delta^{\perp}$ 的对合就是一个 $g\in \mathrm{PO}(\alpha)$ 的限制．

16.3.9 推论. 若 K 是代数闭域，则不论是在 α 正常时或 q 非退化时，都有下列同构：

$$\begin{aligned}\mathrm{GP}(K^2)=\mathrm{GP}(\tilde{K})=\mathrm{GP}(1;K)&\cong \mathrm{PO}(q)\\ &\cong O^{+}(K^3;x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

若 $K=\mathbf{R}$ 且 $q=x^2+y^2-z^2$，则有：

$$\begin{aligned}\mathrm{GP}(\mathbf{R}^2)=\mathrm{GP}(\tilde{\mathbf{R}})&=\mathrm{GP}(1;\mathbf{R})\\ &\cong \mathrm{PO}(q)\cong O^{+}(2,1).\end{aligned}$$

图 16.3.10.

这样我们就找出了某些“典型群”之间的同构；关于这个问题，参见 [DE1]，第 IV 章.

16.3.10 应用

16.3.10.1 既然有了三对对应点以后，单应的轴就知道了，我们就可以利用 16.3.3 几何地画出任一点在一个单应下的象. 至于对合，Frégier 点通过两对点就能决定它们，所以情形就更简单.

例如，一个对合的两重点就是从 δ 向 C 引的切线的切点；两个对合所共有的那对对应点，可通过找出 C 和连结它们的 Frégier 点的直线所共有的点而得到.

根据 16.2.6，上述的作图也使我们能解决前面关于一条直线 D 或者一个直线束 a^* 的那些问题（参见 16.2.3）；图 16.3.10 就是用来解决这些问题的，其中我们用到包含 D 的一张欧氏仿射平面 X 和 X 上一个辅助圆 Γ.

16.3.10.2 **椭圆轴的确定.** 设 $\mathscr{E}$ 是欧氏仿射平面 X 上以 c 为中心的椭圆，而且已知两条共轭直径为 cu，cv（图 16.3.10）——这是实用时常见的情形，例如在画法几何或在 16.7.3 中都是这样. 根据 15.7.7，向量 $\overrightarrow{cu}$，$\overrightarrow{cv}$ 以及 $\overrightarrow{cp}$，$\overrightarrow{cq}$ 分别关于 $\tilde{a}$ 共轭，因而它们的方向在射影直线 c^* 上是对合的，既然关于 $\tilde{a}$ 在 ∞_X 上的配极变换是一个对合——因为它是对合的、单应的非恒等变换，而且 c^* 自然地同构于 ∞_X.

于是，求 $\mathscr{E}$ 的轴就是求关于 $\tilde{a}$ 共轭而且正交的方向；根据 16.3.7，其作图如图 16.3.10 所示.

也可参见 17.9.22.

16.3.10.3 **Castillon 问题.** 问题是这样的：设在欧氏平面上给定一个圆 Γ 和 n 个点 $a_i \notin \Gamma (i=1, \cdots, n)$，求一个内接于 Γ 的多边形 $\{m_i\}(i=1, \cdots, n)$ 使 $a_i \in m_i m_{i+1} (i=1, \cdots, n)$. 这个问题对任一射影平面上有非空象集 C 的圆锥曲线和 $P \backslash C$ 的点 a_i 来说，是同样容易解决的. 基本的想法是 m_1 是以 $f=\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1$ 定义的单应 $f \in GP(C)$ 的固定点，其中 φ_i 是 Frégier 点 a_i 的 C 的对合；具体构作时只要先作 $\alpha'=f(\alpha)$，$\beta'=f(\beta)$，$\gamma'=f(\gamma)$，

其中α，β，γ是C上任意的不同的点，然后再根据下式作出f的轴Δ：

$$\langle \alpha\beta' \cap \alpha'\beta,\ \beta\gamma' \cap \beta'\gamma \rangle = \Delta,$$

所求的点m_t就是$\Delta \cap C$的点．见图16.3.10以及第10.11.4节．

16.4 两条圆锥曲线的相交．Bezout 定理

在本章最后几节中，域K满足$\# K \geqslant 5$．

16.4.1 设$\varphi \in \mathscr{P}_n^{\bullet}(K^2)$是$K^2$上的齐次多项式，次数$n \leqslant 4$；为了讨论使$\varphi(a, b) = 0$的$(a, b) \in K^2$，我们注意到$\varphi(ka, kb) = 0$，从而可求出在$\tilde{K} = P(K^2)$上的那些"根"．还要注意到，在不计相差$K^*$的纯量的情形下，当$(a, b) \neq (0, 0)$时$\omega:(\lambda, \mu) \longmapsto b\lambda - a\mu$是$K^2$上唯一能使$\omega(a, b) = 0$的线性形式．上述内容引出了：

16.4.2 引理． 设$\varphi \in \mathscr{P}_n^{\bullet}(K^2)$，$n \leqslant 4$；若$m = p(a, b)$时$\varphi(a, b) = 0$，则称$m \in \tilde{K}$是$\varphi$的根．下面假定$\varphi \neq 0$．

(i) 要使m是φ的根，必须且只须存在$\phi \in \mathscr{P}_{n-1}^{\bullet}(K^2)$使$\varphi = (b\lambda - a\mu)\phi$．称整数$\omega$为$m$的阶，如果$\varphi = (b\lambda - a\mu)^{\omega}\phi$，其中$\phi \in \mathscr{P}_{n-\omega}^{\bullet}(K^2)$，而且$m$不是$\phi$的根．记$R(\varphi) = \{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$为$\varphi$在$\tilde{K}$中不同的根$m_i$的集合，其中$\omega_i$表示$m_i$的阶．若$\varphi' \in \mathscr{P}_n^{\bullet}(K^2)\backslash 0$，等式$R(\varphi) = R(\varphi')$就表示$\varphi$和$\varphi'$有相同的根，它们的阶也相同．

(ii) 若$m_i = p(a_i, b_i)$，总有：$\varphi = \prod_{i=1}^{k} (b_i\lambda - a_i\mu)^{\omega_i}\phi$，其中$\phi$在$\mathscr{P}^{\bullet}_{n-\sum_{i=1}^{k}\omega_i}(K^2)\backslash 0$中，而且$\phi$没有根；特别有$\sum_{i=1}^{k}\omega_i = n$或$\sum_{i=1}^{k}\omega_i \leqslant n - 2$．

(iii) 若$R(\varphi) = R(\varphi')$且$\sum_{i=1}^{k}\omega_i = n$，则$\varphi' = k\varphi$，$k \in$

K^*.

(iv) 若 $f\in \mathrm{GP}(K^2)$，则 $R(\varphi\circ f)=\{f^{-1}(m_i),\ \omega_i\}_{i=1,\cdots,k}$.

(v) 若K是代数闭域,则对任何φ有 $\sum_{i=1}^{k}\omega_i=n$.

为了证明引理,我们得回到K上通常的多项式的情形,在K上取值,将 $\lambda/\mu=x$ 作为未知数;这么一来,有可能会漏掉一个显然的根 $p(1,0)=\infty\in\widetilde{K}$. 但因 $\varphi\neq 0$, 只有有限个根,所以可作一个$\widetilde{K}$的单应使∞不是根. 这时,上面那些性质在$K[X]$中是经典的结果,因为K的基数大于所考虑的多项式的次数.

16.4.3 一条圆锥曲线与另一条正常圆锥曲线相交.

设α是以非空的C为象集的正常圆锥曲线; α' 是另一条圆锥曲线,不一定是正常的, 方程为q'. 设f是α的一个良好参数化映射,g是如 16.2.9 中与f相应的映射: 则若

$$m=p(x)\in C\cap C',$$

其中C'表示α'的象, 就有 $q'(x)=0$. 但 $m\in C$, 所以存在 $(a,b)\in K^2$ 使 $x=g(a,b)$; 由此即得 $q'(g(a,b))=0$, 即 $(q'\circ g)(a,b)=0$. 于是 $q'\circ g:K^2\to K$ 显然在 $\mathscr{P}_4^\circ(K^2)$ 中;但我们在下面用得到这种情形下的具体算式(参见 16.2.8):

$$g:(\lambda,\mu)\longmapsto(\lambda^2,\lambda\mu,\mu^2),$$

$$q'=ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy,$$

由此即得

16.4.4

$$q'\circ g=a\lambda^4+2b''\lambda^3\mu+(a'+2b')\lambda^2\mu^2+2b\lambda\mu^3+a''\mu^4.$$

我们首先注意到由 $q'\circ g\neq 0$ 可推出 $q'=a'(y^2-xz)=a'q$, 因此 $\alpha'=\alpha$, 这就又顺便地证明了 16.1.4 的末尾. 以下,我们假定 $\alpha'\neq\alpha$, 因而也就有 $q'\circ g\neq 0$, 从而可以利用 16.4.2.

现在我们注意到,若 $m\in C\cap C'$, 则 $f^{-1}(m)$ 作为 $q'\circ g$ 的根的阶是只与α和α'有关,而与使 $\alpha'=p(q')$ 的 q' 以及对C所取的良好参数化映射f都无关的,这可由 16.4.2 (iv) 和 16.2.9 的命题中最后一个结论推出. 由此即可引出:

16.4.5 定义. 若 $m\in C\cap C'$，上述整数称为 m 的阶. 记 $C\square C'=\{(m_i,\omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$，其中 m_i 遍取 $C\cap C'$，ω_i 则表示 m_i 的阶. C' 称为在 m 处与 C 相切(相应地：密切，超切)，如果 m 的阶 $\geqslant 2$ (相应地：$\geqslant 3$，$=4$). 若 $m\notin C\cap C'$，称它是零阶的.

16.4.6 评注. $\#(C\cap C')$ 是有限数，这一点可由 16.4.2 和 16.4.3 得出.

必须注意，$C\square C'$ 仅在 C 是正常时才有意义；而当 C' 也正常时，我们在 16.4.7.4 中将会看到 $C'\square C=C\square C'$. 在 16.4.7.3 和 16.4.12.1 中将会说明何以要用相切、密切这两个词.

16.4.7 阶的解释. 由于阶是良好参数化映射下的不变量，我们可以假定 q 和 q' 是如 16.4.4 中那样给定的；这时，我们来看点 $m=p(1,0,0)$ 的阶是什么. 由于 $m=f(p(1,0))$，这个阶就是 $(1,0)$ 作为 16.4.4 中的根的阶，因此：

16.4.7.1
$$\begin{cases} m\text{的阶}\geqslant 1 \Longleftrightarrow a=0; \\ m\text{的阶}\geqslant 2 \Longleftrightarrow a=b''=0; \\ m\text{的阶}\geqslant 3 \Longleftrightarrow a=b''=a'+2b'=0; \\ m\text{的阶}=4 \Longleftrightarrow a=b''=a'+2b'=b=0. \end{cases}$$

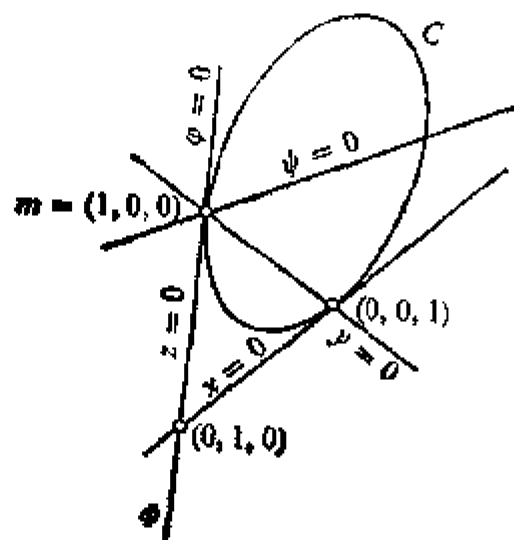


图 16.4.7.

阶 $\geqslant 1$：$m\in C'$ 的条件就是 $a=0$.

阶 $\geqslant 2$：由 13.1.3.7 后面的讨论以及 14.5.3 可知，(x_0,y_0,z_0) 关于 α' 的极线的方程为

16.4.7.2 $ax_0x+a'y_0y+a''z_0z+b(y_0z+z_0y)+b'(z_0x+x_0z)+b''(x_0y+y_0x)=0$;

特殊地，$m=(1,0,0)$ 关于 α' 的极线 $m^\perp$ 为

$$ax+b'z+b''y=0;$$

因而 $m\in C'$，$b''=0$ 的条件就正好表示了 $z=0$——它已经在 m

处与 α 相切—— 是 α' 在 m 处的一条切线（注意，C' 可以是退化的）.

阶 $\geqslant 3$：若阶 $\geqslant 3$，可写

$$q' = a'(y^2 - xz) + z(2by + a''z),$$

即 $q' = kq + \varphi\phi$，其中 $k \in K$, $\varphi, \phi \in E^*\backslash O$，而且 φ 是 α' 在 m 处的切线 Φ 的方程. 反过来，若 $q' = kq + \varphi\phi$，且 φ 是 Φ 的方程，则 m 的阶 $\geqslant 3$.

阶 $=4$：这时，可写 $q' = kq + \varphi^2$，其中 φ 是 α 在 m 处的切线的方程，反之亦然. 总之，有：

16.4.7.3 命题. 设 $\alpha, \alpha' \in \mathrm{PQ}(P)$，其中 α 正常，方程为 q，象集 C 非空，α' 不一定正常，象集为 C'，而且 $\alpha' \neq \alpha$；设 $m \in C \cap C'$，φ 是 α 在 m 处的切线 Φ 的一个方程. 则：

m 的阶 $\geqslant 2 \Leftrightarrow \Phi$ 与 α' 相切；

m 的阶 $\geqslant 3 \Leftrightarrow \alpha'$ 的任一方程必形如 $q' = kq + \varphi\phi$，其中 $\phi \in E^*\backslash O$，$k \in K$；

m 的阶 $=4 \Leftrightarrow \alpha'$ 的任一方程必形如 $q' = kq + \varphi^2$，其中 $k \in K$.

16.4.7.4 推论. 若 C 和 C' 都是正常的，则：

$$C \square C' = C' \square C.$$

考察下面的列出 $C \square C'$ 的所有可能性的表格，即可证得推论（用到 16.4.2）：

16.4.7.5 表格.

类型	$C \square C'$	$\sum_{i=1}^{k} \omega_i$	$\#(C \cap C')$	$\#\{m: 阶(m) \geqslant 2\}$	$\#\{m: 阶(m) = 4\}$
	$(a, 1)$	1	1	0	0
	$(a, 1), (b, 1)$	2	2	0	0
	$(a, 2)$	2	1	1	0
I	$(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)$	4	4	0	0
II	$(a, 2), (b, 1), (c, 1)$	4	3	1	0
III	$(a, 2), (b, 2)$	4	2	2	0
IV	$(a, 3), (b, 1)$	4	2	1	0
V	$(a, 4)$	4	1	1	1

根据 16.4.7.3，当 C 和 C' 都是正常时，最后三列中的整数具有关于 C 和 C' 对称的性质；于是可以用这三列中的整数来鉴别表格中的各行．

16.4.8 定理． 设 $\alpha, \alpha', \alpha'' \in \mathrm{PQ}(P)$，$\alpha$ 正常且有非空象集 C，α' 和 α'' 任意（但与 α 不同），象集分别为 C'，C''；置 $C\square C' = \{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$，则：

(i) $\sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i$ 可取值 0，1，2，4；

(ii) 若 $\sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i = 4$，则 $C\square C' = C\square C''$ 等价于 α'' 属于 α 和 α' 决定的圆锥曲线束（参见 14.2.7.1）；

(iii) 若 $F: P \to P'$ 是 P 与另一射影平面 P' 间的单应，则：$f(C)\square f(C') = f(C\square C') = \{(f(m_i), \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$；

(iv) 若 K 是代数闭域，则：$\sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i = 4$．

(i) 和 (iv) 可由上述讨论和 16.4.2 (v) 得出．由 14.1.3.8 的定义即可得出 (iii)．为证 (ii)，设 q，q'，q'' 分别是 α，α'，α'' 的方程，g 是 α 的一个良好参数化映射，再置 $\varphi = q'\circ g$，$\varphi' = q''\circ g$．根据 16.4.2 的记法，$C\square C' = C\square C''$ 时就有 $R(\varphi) = R(\varphi')$；但这样就由 16.4.2 (iii) 推出 $\varphi' = k\varphi$，$k \in K^*$，因而 $(q'' - kq')\circ g = 0$，于是由 16.4.4 后面的讨论，$q'' - kq' = hq$，$h \in K$．这正说明，以 $q'' = kq' + hq$ 为方程的 α'' 是属于 α 和 α' 定义的圆锥曲线束的（参见 14.2.7.1）．充分性是显然的．

16.4.9 注． 16.4.8(iv) 是对任意两对 P 的代数曲线都成立的 Bezout 定理在圆锥曲线情形下的结论．困难在于首先要定义公共点的阶数（或"重数"）；然后要证明重数之和等于这两对曲线的次数的乘积（在我们的情形是 $2\times 2=4$）．关于这个定理的叙述，可见 [FN]，第 112 页，其中给出的是近代语言的叙述，或者在必要时可见 [WK]，第 111 页，那里的叙述更为初等，没有很系统地用到交换代数．

另一种比我们刚才的做法更几何化的处理方法，将在16.4.11.2中给出.

16.4.10 圆锥曲线相交的例. 束中的退化圆锥曲线

我们要给出表16.4.7.5中五种类型的例子，与此同时还要对α和α'所决定的束$\mathscr{F}$中的退化圆锥曲线作系统的讨论.

类型 I: 四个不同的点

设a, b, c, d是这样的四个点；若φ, ψ, ξ, η分别是直线ab, cd, bc, da的方程，则经过这四点的圆锥曲线束的方程是$\{k\varphi\psi + h\xi\eta: (k, h) \in \tilde{K}\}$ (参见14.2.7.2). 束$\mathscr{F}$显然包含三条不同的退化圆锥曲线，它们分别由直线$\{ab, cd\}$, $\{ac, db\}$, $\{ad, bc\}$构成；根据14.2.7.5，可以知道没有其它可能了. 从图14.5.2的作

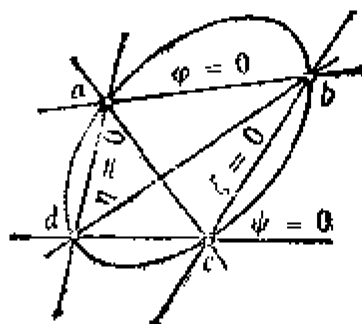


图 16.4.10.1.

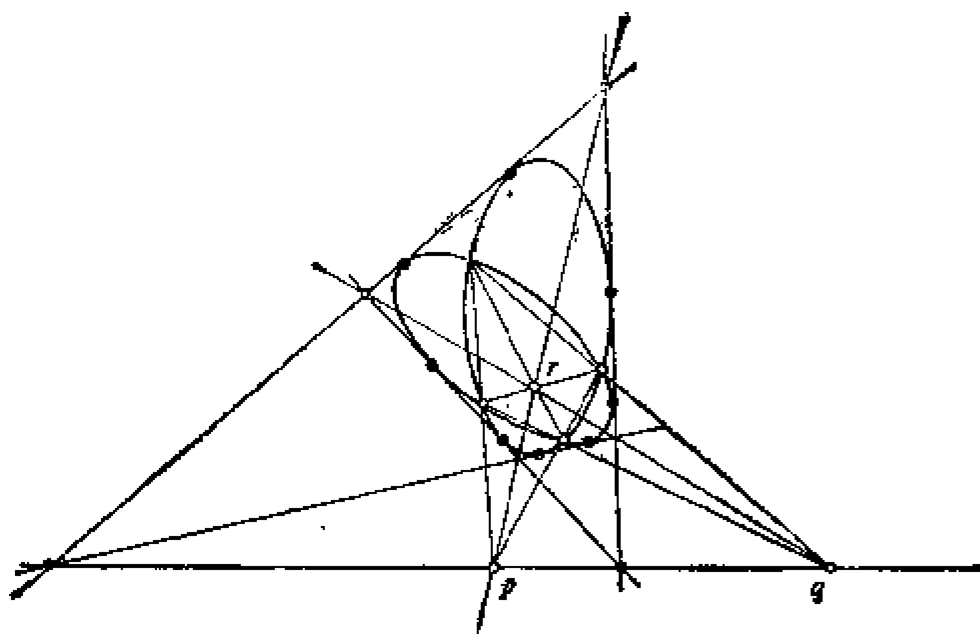


图 16.4.10.2.

法中可以看出三角形 $\{p = ab\cap cd,\ q = ac\cap db,\ r = ad\cap bc\}$ 关于 $\mathscr{F}$ 中所有圆锥曲线都是自配极的，而且这样的三角形是唯一的；事实上，我们可取一个射影标架 $\{p, q, r, s\}$，其中 s 属于 $\mathscr{F}$ 中所有的圆锥曲线，因而 $\mathscr{F}$ 由方程形如 $k(x^2 - z^2) + h(y^2 - z^2)$ 的圆锥曲线构成，其中 $(k, h)\in \tilde{K}$，而 x^2, y^2, z^2 的系数可以是不同的（由此可得出一个正交基的唯一性，亦即一个自配极三角形的唯一性，参见 14.5.4）。

这个自配极三角形的唯一性有一个很有意义的推论如下：若 α, α' 还容有四条不同的公切线，则它们满足图 16.4.10.2 中的相交性质，即它们的六个交点位于 $\{p, q, r\}$ 的边上；事实上我们可以用 14.6 的对偶形式：α, α' 的公切线就是 α^*, α'^* 的公共点，因而三条直线 AA', BB', CC' 关于 α, α' 两两共轭，它们构成的三角形就是关于 α 和 α' 自配极的.

类型 II: $(a, 2), (b, 1), (c, 1)$

取前面三点为 a, b, c 的射影标架；假设 $\mathscr{F}$ 中正常圆锥曲线在 a 处的公切线 Φ（参见 16.4.7.3）方程为 $x + y$；则 $\mathscr{F}$ 由方程为 $\{ky(x + z) + hxz: (k, h)\in \tilde{K}\}$ 的圆锥曲线构成；两条退化圆锥曲线为 $y(x + z) = 0$ 和 $xz = 0$，即 $\{ab, ac\}$ 和 $\{\Phi, bc\}$. 由于（参见 14.1.4.2）$\det A = k^2h/4$，没有其他可能了.

类型 III: **双切圆锥曲线**

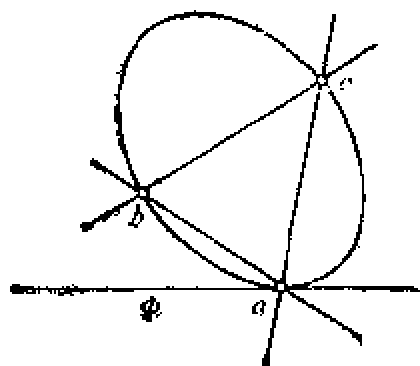


图 16.4.10.3.

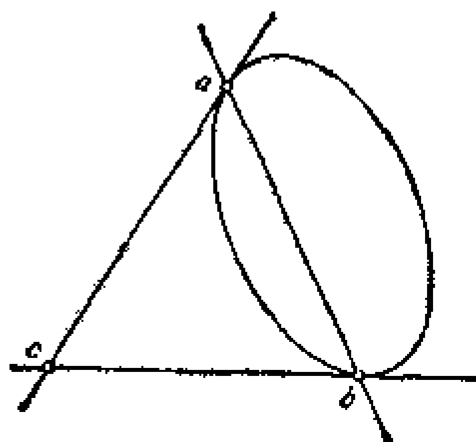


图 16.4.10.4.

根据 16.1.3.2，在某适当标架 $\{a, b, c\}$ 中束 $\mathscr{F}$ 是由方程为 kx^2+hyz 的圆锥曲线构成的，其中 c 是在 a 和 b 处的公切线的公共点. $\mathscr{F}$ 中的退化圆锥曲线，一条是 $\{ca, cb\}$，另一条就是一条直线 ab（"两重直线"），跟 $\det A=-kh^2/4$ 时看出的情形是一样的.

类型 IV：密切圆锥曲线

根据 16 4.7 中的讨论，我们可以将 $\mathscr{F}$ 中的圆锥曲线的方程

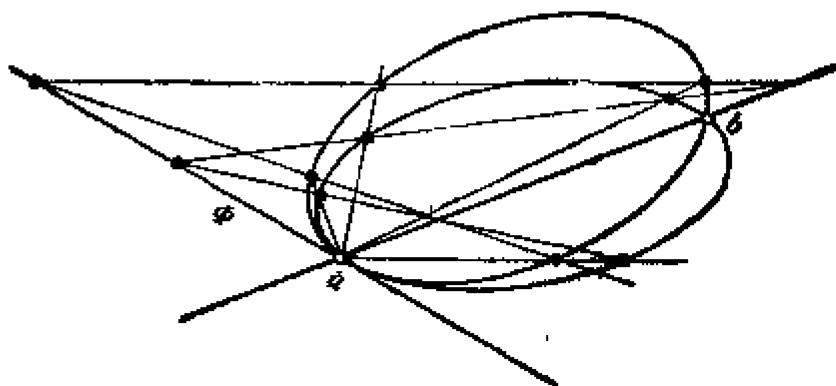


图 16.4.10.5.

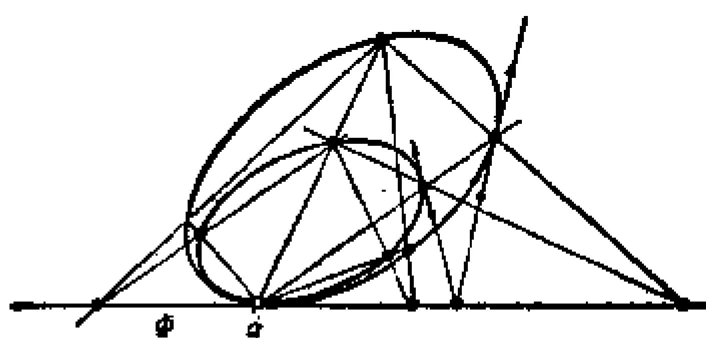


图 16.4.10.6.

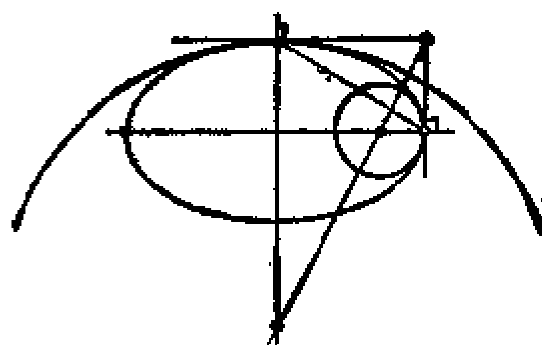


图 16.4.10.7.

取为

$$k(y^2 - zx) + hyz,$$

因为 $\mathscr{F}$ 中圆锥曲线都跟 $y^2 - xz$ 在 a 处密切而且经过 b. $\mathscr{F}$ 中只有一条退化的圆锥曲线，它的象集就是 $\{ab, \Phi\}$. 有关从几何上描述在 a 处密切的特征，当 $K = \mathbf{R}$ 时见 16.4.12；对一般情形，在 16.4.13 中有一个通过单应描述的特征.

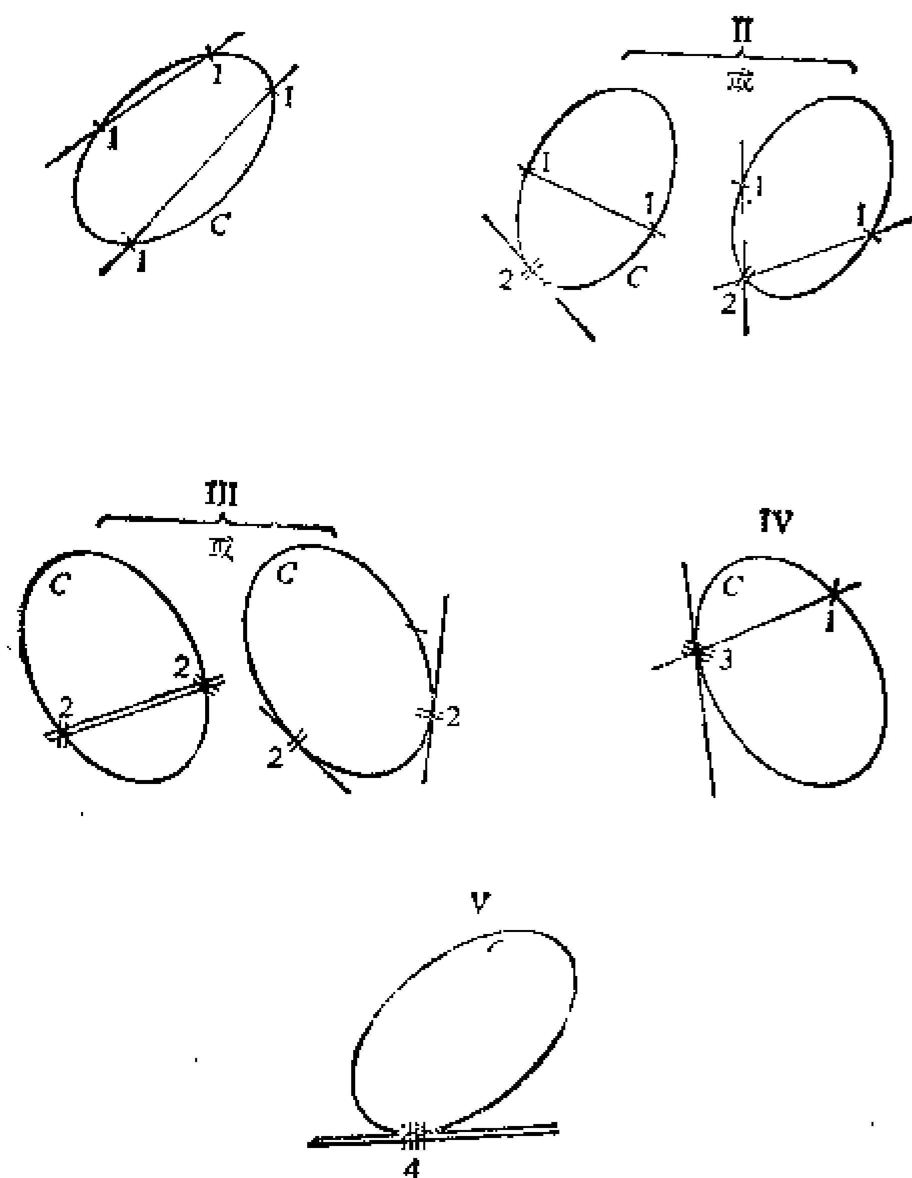
类型 V：**超切圆锥曲线**

根据 16.4.7，可将 $\mathscr{F}$ 写为 $k(y^2 - zx) + hz^2$. 唯一的一条退化圆锥曲线是以 z^2 为方程，以切线 Φ 那条两重直线为象集的. 图 16.4.10.6 表示了如何从 $\mathscr{F}$ 中一条圆锥曲线作出它所有的圆锥曲线来. 要从几何上描述两个超切圆锥曲线是很困难的；在欧氏的情形，它们必须有相同的曲率，但这并不是充分的条件. 除非这些圆锥曲线有一条公共的经过 a 点的欧氏对称轴，这时由"密切"就能推得"超切"；图 16.4.10.7 表示了两个在椭圆顶点处密切——从而也超切——的圆，同时也画出了求得它们的中心的作法. 在 16.4.13 中有一个对任意的 K 都适用的特征. 在 19.6.8.3 中也还会遇到超切的圆锥曲线.

16.4.11 注

16.4.11.1 对两条圆锥曲线的公共点的深入讨论，涉及到解四次方程的问题，例如16.4.4；不过，如果知道这两条圆锥曲线所定义的束 $\mathscr{F}$ 中某一条退化的圆锥曲线，就只剩下两个二次方程要解了. 然而，$\mathscr{F}$ 中退化圆锥曲线的讨论是解三次方程的问题，参见 14.2.7.5. 由此推得(因为 16.4.4 是 K 上任一四次方程)，任一四次方程总可化为一个三次方程(因而可用根式解出).

16.4.11.2 16.4.10 中五种类型的讨论表明，$C \square C'$ 可通过取束 $\mathscr{F}$ 中一条退化圆锥曲线 C'' 并计算 C'' 中直线与 C 的交点数目来算出，计算交点数目时，对 C'' 中每一直线，要将属于两条直线的点的阶数相加，一条切线的切点阶数计为 2，对退化为一条直线("两重直线")的圆锥曲线要加倍计数；参见图 16.4.11. 如果要用这种几何的方式来定义 $C \square C'$，必须说明得出的结果与所选



图· 16.4.11.

取的圆锥曲线无关，详见 [SG]，第 XII 章. 为了保证退化圆锥曲线的存在和这些圆锥曲线跟一条直线的相交，这一方法是假定 K为代数闭域的.

16.4.11.3 相切理论. 我们可以对可微分曲线定义一套相切理论；阶数 $\geqslant 2$ 就等价于说它们是相切的，阶数 $\geqslant 3$ 或等于 4，在 $K=\mathbf{R}$ 的圆锥曲线的情形下就对应于我们的密切或超切的概念. 关于这种相切理论，可见 [LF1]，第 74 页以后，或 [DE5]，第 32 页，问题 9.

16.4.12 密切圆锥曲线与微分几何. 设 P 是实射影平面，D 是

P 上一条直线而 $X = P\backslash D$ 是相应的实仿射平面(参见 5.1.3)；设 C，C' 是在 $m \in C \cap C'$ ($m \notin D$) 相切的两条 P 上的正常圆锥曲线。根据 16.7.2，可以把 C，C' 考虑为 C^∞ 的(参见 [B-G]，第 8 章对这一点以及下文都有阐述)正则几何弧。若还在 X 加上欧氏结构，则有：

16.4.12.1 命题. C 和 C' 在 m 处密切的充要条件是 X 中的相应的几何弧有相同曲率。

我们可以假设 C，C' 有良好参数化映射，使 $(0, 1)$ 的象为 m，且在取 m 处的切线为标准正交坐标系的轴后对 C 而言形如 $t \longmapsto (f(t),\ g(t))$，对 C' 则形如 $t \longmapsto (u(t),\ v(t))$，且 $g'(0) = v'(0) = 0$。设 q 是 C 的一个方程，定义 16.4.5 和代数中关于多项式的三重根的经典结果表明，若

$$\frac{d^2(q(u(t), v(t)))}{dt^2}(0) = q''_{x^2}(m)(f'(0))^2 + q'_y(m)g''(0) = 0,$$

则 C 密切于 C'。但我们也有 $q(f(t),\ g(t)) = 0\ \forall t$，由此即得：

$$q''_{x^2}(m)(u'(0))^2 + q'_y(m)v''(0) = 0.$$

由这两个关系式，再加上 $g'(0) = v'(0)$，就推出了 C 和 C' 的两个曲率 $\frac{|g''(0)|}{(f'(0))^2}$ 和 $\frac{|v''(0)|}{(u'(0))^2}$ 是相等的. 逆命题同时也已得证.

16.4.13 密切、超切圆锥曲线与单应. 这里 K 又是任意的. 设给定 P 上一条直线 D 和一点 $a \in D$，则存在 P 的单应 f 使 $f(x) = x\ \forall x \in D$ 而且对任一经过 a 的直线 S 有 $f(S) = S$。这样的单应称为以 D 为轴、以 a 为心的安射. 给定直线 D 以及与 a 共线的两点 $(m, f(m))$ 后，安射也就确定了. 它除了 D 的点外没有其它固定点.

为了证明上述结论，只须把 D 放到无穷远去(参见 5.4)；这时可以看到，f 在仿射平面 $P\backslash D$ 上的限制正是一个以 a 为方向的向量平移.

在使 D 的方程为 $z = 0$ 且 $a = p((1, 0, 0))$ 的齐次坐标系中，f 的一个矩阵形如

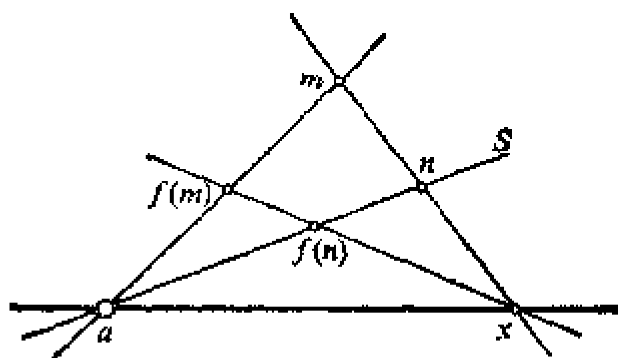


图 16.4.13.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16.4.13.1 命题. 设 C, C' 是两条正常圆锥曲线，在一公共点 $a \in C \cap C'$ 有同一条切线 T. 要使 C 和 C' 在 a 处密切，必须且只须存在一个以 a 为心、以 D 为轴的经过 a 点的安射 f，使 $f(C) = C'$. 另外，C 和 C' 超切的充要条件是 $D = T$.

首先注意到，这个命题证实了图 16.4.10.5 和 16.4.10.6 是合理的. 设 f 是以 a 为心、以 D 为轴的安射；若 $D \neq T$，设 b 是 $D \cap C$ 的第二个点，则根据安射的性质，$f(C)$ 是一条在 a 处与 T 相切的、经过 b 点的圆锥曲线；另外，C 和 $f(C)$ 除 a 和 b 外没有其它公共点. 因此，根据表 16.4.7.5，在 a 点处 C 和 $f(C)$ 的相交是第 IV 类型的. 若 $D = T$ 而 $z = 0$ 是 D 的一个方程，则可有下式：$q = a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx$（参见 16.4 7.1）；但我们已经看到 f 是形如 $(x, y, z) \longmapsto (x + \alpha z, y, z)$ 的，所以 f^{-1} 是 $(x, y, z) \longmapsto (x - \alpha z, y, z)$ 而 $f(C)$ 的方程为

$$q' = a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx - 2b'\alpha z^2(\text{参见 } 14.1.3.8),$$

从而由 16.4.7.3 可知 $f(C)$ 确实超切于 C.

反过来，设 C, C' 在 a 处密切，m, m' 是 C, C' 与一条过 a 点的直线的交点，且 $m \neq m'$；又设 D 是连接 a 点和 $C \cap C'$ 的点 b 的直线，其中 b 当 C 与 C' 不超切时是跟 a 不同的点，而当 C 与 C' 超切时 $D = T$. 则以 D 为轴、以 a 为心的使 $f(m) = m'$ 的

射 f 给出一条圆锥曲线 $C'' = f(C)$，根据前面的讨论和 16.4.8 (ii)，这条圆锥曲线属于 C 和 C' 所定义的束．但 $f(m) = m' \in C'$，因此 $C'' = C'$。

16.5 圆锥曲线束

本节中考虑的所有圆锥曲线束都是非退化的(参见 14.2.7.5)。

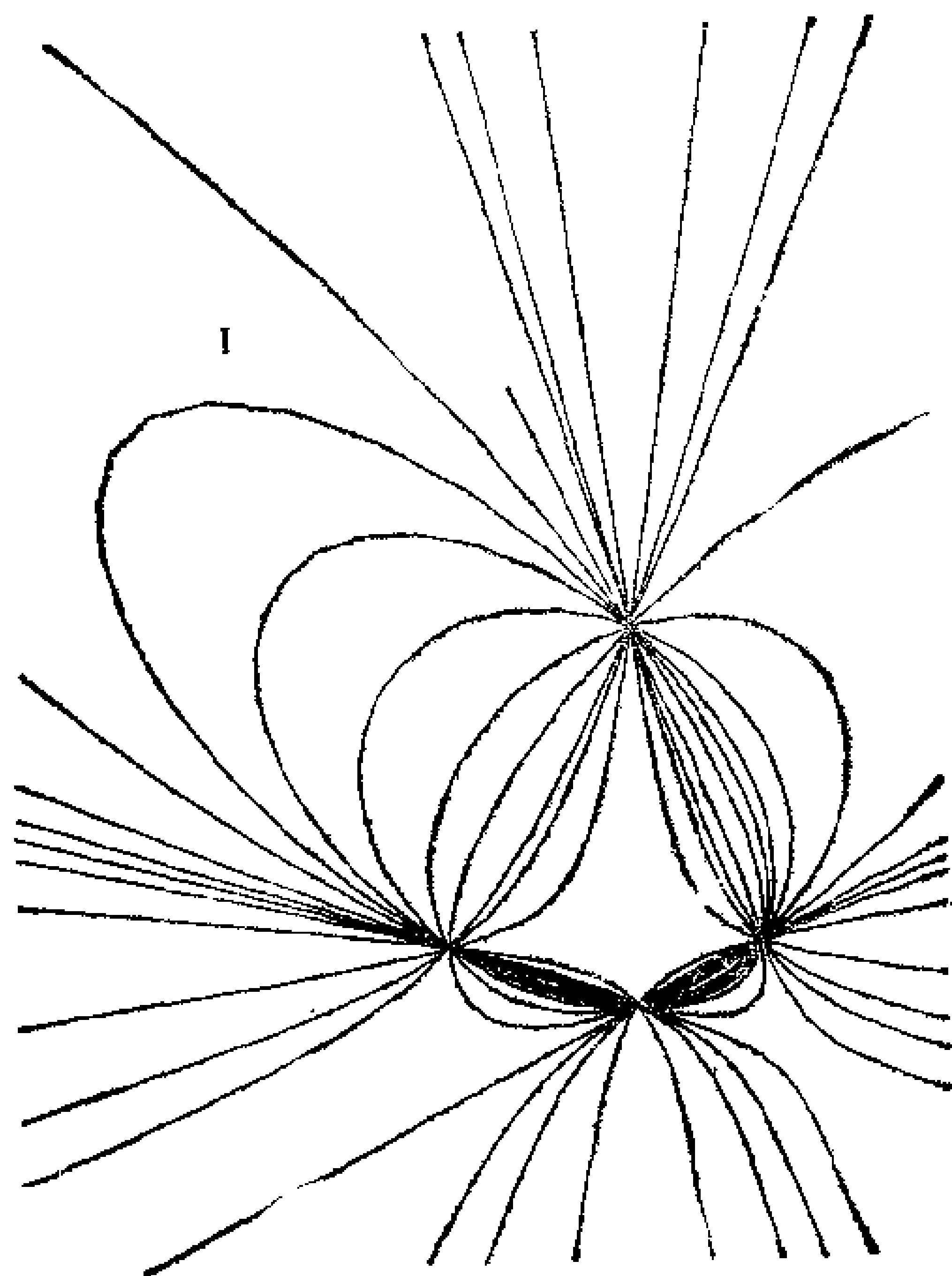


图 16.5.1.1.

16.5.1 命题. 设 P 是射影平面，α 是 P 上的象集 C 非空的正常圆锥曲线，$m_i(i=1,\cdots,k)$ 是 C 上带有整数 $\omega_i\geqslant 1$ 的点，且 $\sum_{i=1}^{k}\omega_i=4$，则

$$\mathscr{F}=\{\alpha'\in \mathrm{PQ}(P): C'=\mathrm{im}(\alpha'),\\ C\square C'=\{(m_i,\ \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}\}$$

是 P 的一个圆锥曲线束. 这样的圆锥曲线束称为满的，我们根据

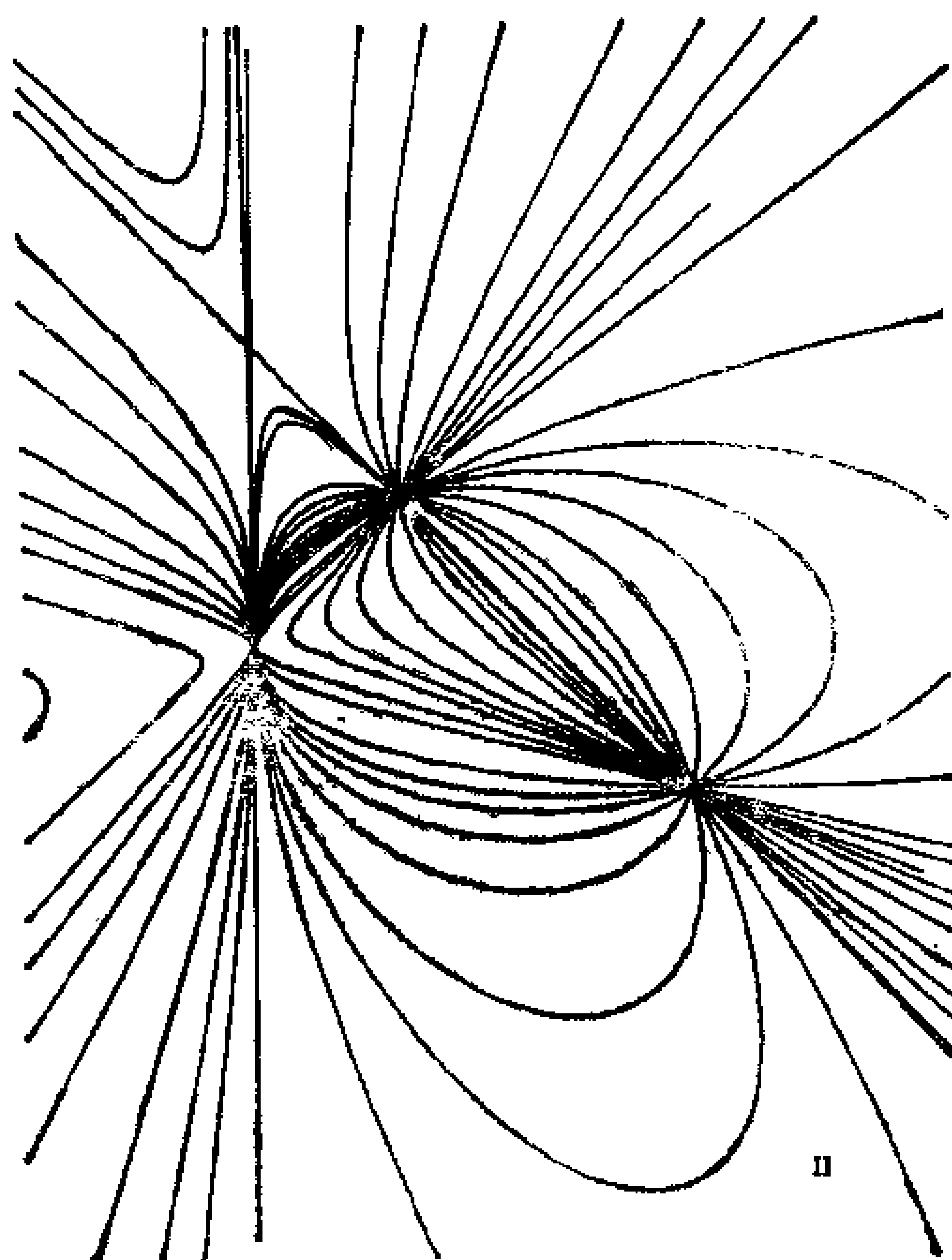


图 16.5.1.2.

16.4.7.5 将它跟 I，II，III，IV，V 中某一类型相应起来．集合 $\{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$ 只与 $\mathscr{F}$ 有关，而与出发的那条正常圆锥曲线 α 无关，特别是类型只与 $\mathscr{F}$ 有关．给定两个满圆锥曲线束 $\mathscr{F}$，$\mathscr{F}'$ 后，要有 $f\in \mathrm{GP}(P)$ 使 $f(\mathscr{F})=\mathscr{F}'$，必须 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 类型相同．反过来，若 $\mathscr{F}$，$\mathscr{F}'$ 都是满的，且有同一类型 I，或 II，或 III，则存在 $f\in \mathrm{GP}(P)$ 使 $f(\mathscr{F})=\mathscr{F}'$；在 $K=\mathbf{R}$ 或 K 为代

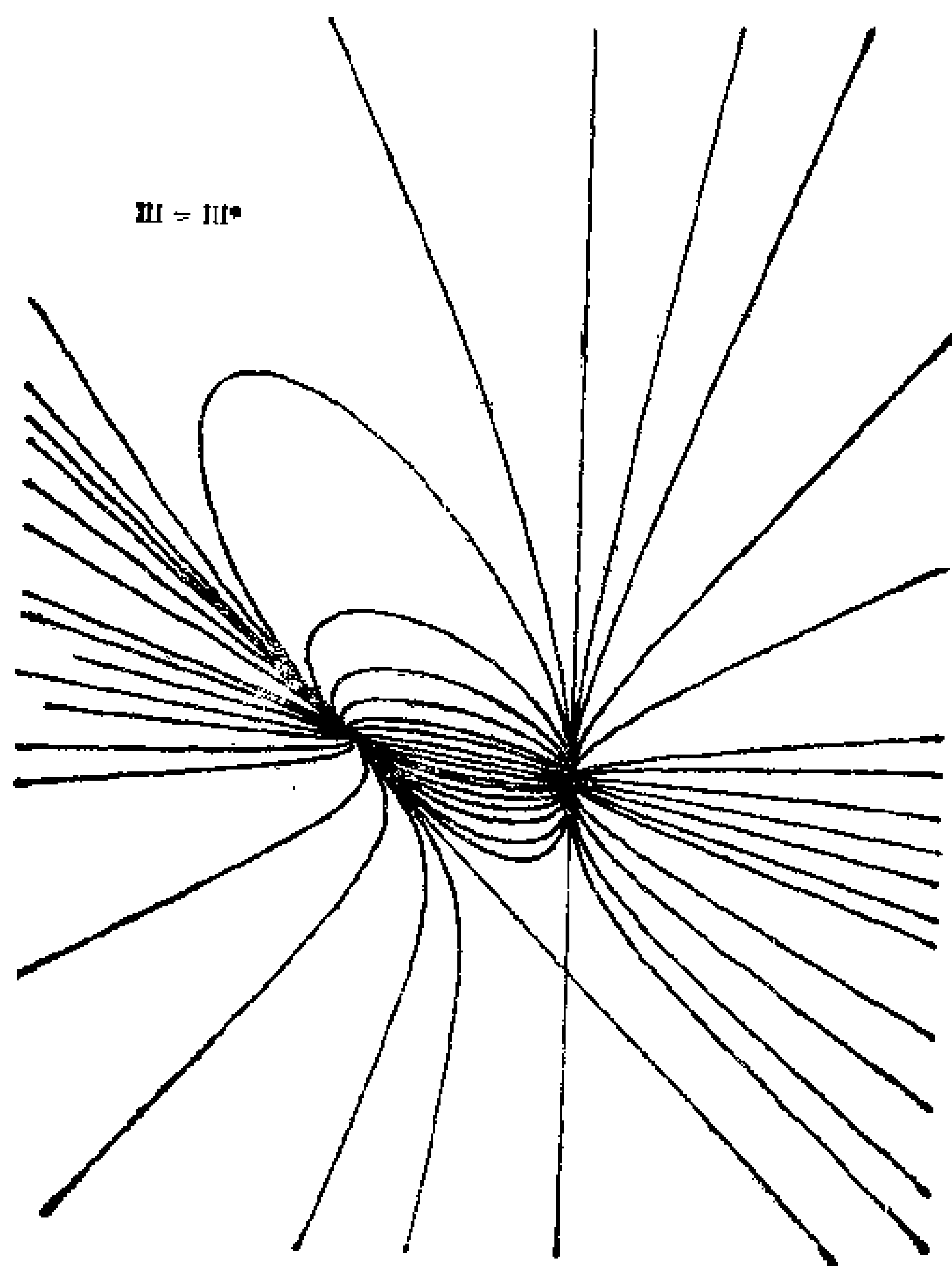


图 16.5.1.3.

数闭域时，对类型 IV 或 V 也有同样的结论.

为证 $\mathscr{F}=\{\cdots\}$ 是圆锥曲线束，只要应用例 16.4.10，其中列出了使 $C\square C'=\{\cdots\}$ 的圆锥曲线 C'；再由 16.4.8 即可得出结论. 由 16.4.7.4 可推得，类型只与 $\mathscr{F}$ 有关，而与 C 无关. 最后，关于最末那个结论，我们先由 16.4.8 (iii) 看出 $\mathscr{F}$ 和 $f(\mathscr{F})$ 有相同类型. 对逆命题来说，当类型为 I 或 II 或 III 时，我们利用

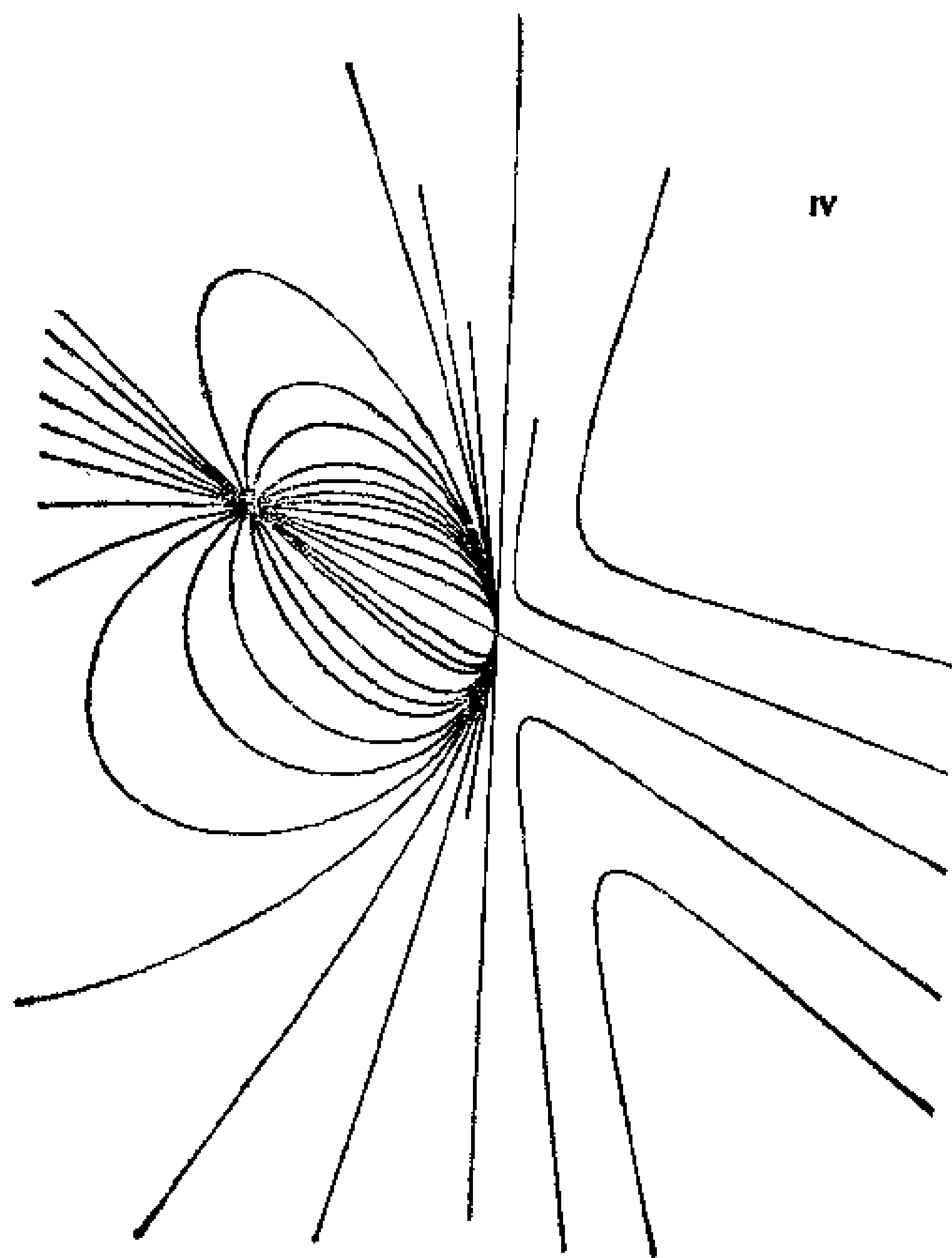


图 16.5.1.4.

它们可表示为 $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, \Phi\}$, $\{a, b, c\}$ 以及 GP(P) 在这些元素上可迁(参见 4.5.10) 的事实. 在 IV 或 V 的情形, 我们一般并不能得出结论, 因为必须给出一条圆锥曲线来决定这样的圆锥曲线束, 而两条圆锥曲线一般是不能通过 GP(P) 互演的(参见 13.1.4.5). 若 K 为代数闭域或 $K=\mathbf{R}$, 则可利用 14.1.5.3, 从而归结到同一条圆锥曲线 C 上. 但这时类型 IV 由两个点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 C 所定义, 而类型 V 由一点所定义. 而根据 16.3.8, C 的群(参

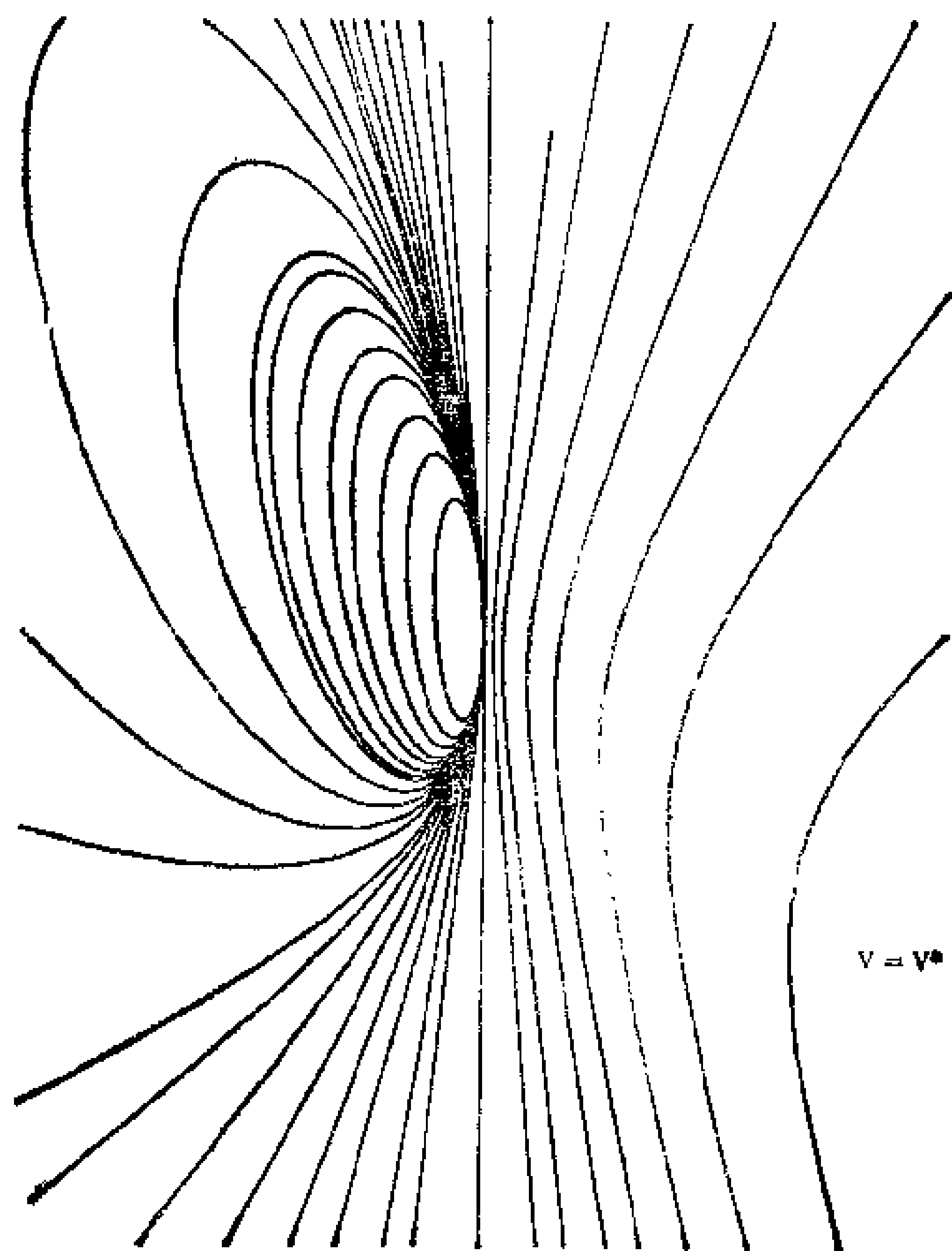


图 16.5.1.5.

见 16.3.1)在 C 的三点上是可迁的.

16.5.2 注. 在 16.4.10 中我们对满圆锥曲线束给出了具体的方程,并找出了这些束中的退化圆锥曲线.

对 $K = \mathbf{R}$ 时的非满圆锥曲线束，可见 16.8.15；但也可如下进行讨论.

若 $\mathscr{F}$ 是一个非满的圆锥曲线束，$K = \mathbf{R}$；则由 7.3 和 7.6，可以定义 P^C 的圆锥曲线束 $\mathscr{F}^C$，称之为 $\mathscr{F}$ 的**复化束**. 可在 P^C 中对 $\mathscr{F}^C$ 进行讨论；然后再回到 P 中，就可能的情形将 P^C 中所得到的结论在 P 中加以解释. 这种技巧的例可见 17.5.

16.5.3 线性的用处

16.5.3.1 设 $\mathscr{F}$ 是 P 的圆锥曲线束，$m \in P$；则存在 m' 使 m, m' 对于 $\mathscr{F}$ 中任一圆锥曲线共轭.

我们在这里应用配极变换的拓广 14.5 6；设 q, q' 是 $\mathscr{F}$ 的两个方程,极型为 Π, Π'. 若 $m = p(x)$, m 对于 q (相应地，q') 的配极直线就是 $\Pi(x, \cdot) = 0$ (相应地，$\Pi'(x, \cdot) = 0$)；因此所有使 $\Pi(x, x') = \Pi'(x, x') = 0$ 的 $m' = p(x')$ 都适合要求，因为 $kq + hq'$ 的极型是 $k\Pi + h\Pi'$.

16.5.3.2 我们看到,若 $\mathscr{F}$ 是第 I 类型的,则当 m 不在公共自配极三角形的边上时，m' 是唯一的. 从 P 的一个子集到自身的映射 $m \longmapsto m'$ 称为**二次变换**，它起着重要的作用. 参见例如 [DQ]，第 153 页，[ML]，第 52 页，[FN] 第 171 页以后.

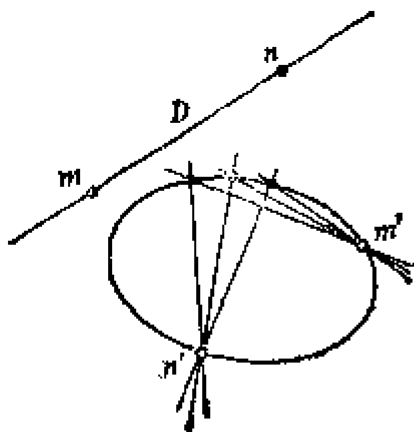


图 16.5.3.

16.5.3.3 16.5.3.1 表明了，若 $m \in P$，则它关于 $\mathscr{F}$ 中不同圆锥曲线的配极直线都经过 m'，而且，当它们是一条直线时(这就是 m 不属于 $\mathscr{F}$ 中任一退化圆锥曲线的根基时的情形),这条 $(m')^*$ 的直线单应于定义 $\mathscr{F}$ 中圆锥曲线 $kq + hq'$ 的 $(k, h) \in \tilde{K}$，取 P 上一条

不经过 $\mathscr{F}$ 中所有退化圆锥曲线的任一根基的直线 D，又取两点 $m, n\in D$；则 D 关于 $kq+hq'$ 的极点就是 m 和 n 关于 $kq+hq'$ 的配极直线的交，因此，由上述讨论和 16.2.3 可知：D 的极点集合是 P 上一条圆锥曲线，它经过 m' 和 n'. 实际上，这条圆锥曲线是 D 在“二次变换”下的象集，这个变换因而将直线变成了圆锥曲线. 由此可以看出它为什么叫这个名称，16.8.24 也是说明这个缘故的.

16.5.4 Desargues 定理. 我们先回顾一下 14.2.8.3，因为下面一直要用到它. 设 $\mathscr{F}$ 是一个非退化的圆锥曲线束；一条直线 D 称为关于 $\mathscr{F}$ 是良好的，如果 D 不含 $\mathscr{F}$ 的基中的任何一点(参见 14.2.7.3) 而且不含于 $\mathscr{F}$ 中一条(退化)圆锥曲线中. 于是，若 D 是一条关于 $\mathscr{F}$ 良好的直线，则存在一个 D 的对合 f 使 $\mathrm{im}(\alpha)\cap D$，$\forall\alpha\in\mathscr{F}$，形如 $\{m, f(m)\}$，$m\in D$.

16.5.5 应用

16.5.5.1 十一点圆锥曲线. 设 $\{a, b, c, d\}$ 是一个射影标架，$p=ab\cap cd$，$q=ac\cap db$，$r=ad\cap bc$，D 是一条不含这七个点的直线，则存在一个含下列十一个点的圆锥曲线：

——p, q, r；

——关于 a 和 b 调和共轭于 $u=ab\cap D$ 的点 u'，以及相应于 ac，ad，bc，bd，cd 的五个同样类型的点；

——D 上 Desargues 对合的两个两重点 α，β(如果它们存在的话)，该对合的对应点是 $\{ab\cap D, cd\cap D\}$，$\{ac\cap D, db\cap D\}$，$\{ad\cap D, bc\cap D\}$.

事实上，只要引进一个过 a, b, c, d 的圆锥曲线束，再注意到上述十一点都位于 16.5.3.3 中 D 关于该束相应的那条圆锥曲线上.

16.5.5.2 跟一条直线相切的一束圆锥曲线. 若 $\mathscr{F}$ 是圆锥曲线束，D 是一条关于 $\mathscr{F}$ 良好的直线(参见 16.5.4)，则存在两条或不存在 $\mathscr{F}$ 中的圆锥曲线与 D 相切，切点是 $\mathscr{F}$ 在 D 上决定的对合的二重点. 具体的作法可由 16.3.10.1 得出；特别还可利用 $\mathscr{F}$ 的退化圆锥曲线.

16.5.5.3 $n=3$ 时的 Poncelet 大定理. 设 $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ 是正常圆锥曲线的象集 C 中的两个内接三角形;则存在一个与 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的六条边相切的圆锥曲线 Γ. 推论: 若存在一个三角形 $\mathscr{C}$ 内接于圆锥曲线 C 而外切于圆锥曲线 Γ, 则只要有从 $a\in C$ 出发的 Γ 的两条不同切线存在，就必定存在其它的以 a 为一个顶点的上面那样的三角形;若 K 是代数闭域,我们就可以在 $C\backslash\Gamma$ 任取一点 a, 若 $K=\mathbf{R}$, 可取充分靠近 $\mathscr{C}$ 的一个顶点的任意一个 a.

为了证明上述结论,设各点已如图取定,只要能将 16.2.7.2 用到两条直线 D 和 E 上去,从而(由 6.1.4) 证得 $[b, d, e, c]=[d', b', c', e']$; 而 16.2.5 表明其中每一式都等于 $[b, b', c', c]_C$.

在 10.10.4 和 10.13.3 中，我们已经碰到过这个问题; 16.6 整

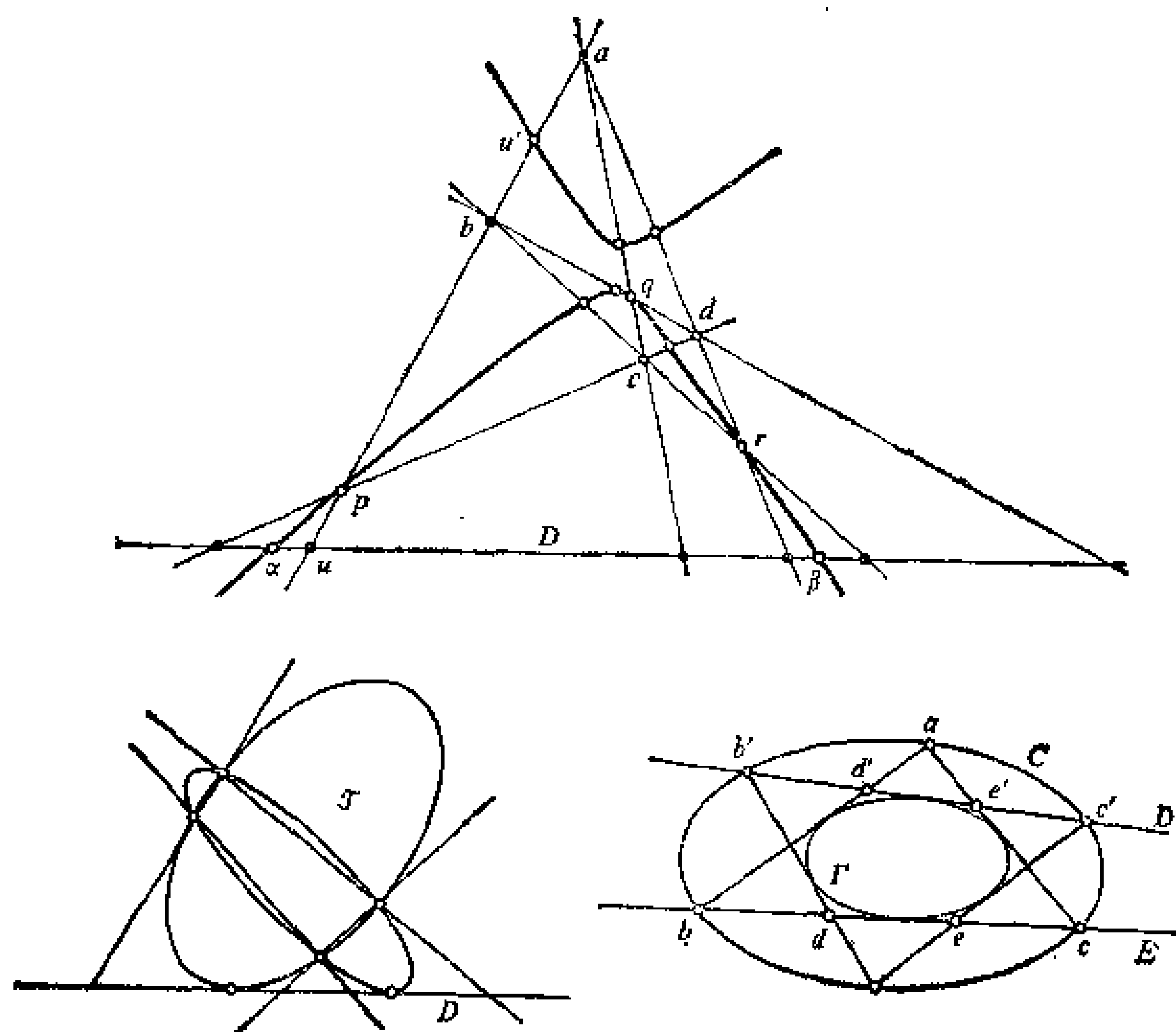


图 16.5.5.

节都将讨论这个问题.

16.5.6 对偶性

16.5.6.1 已知条件、记法等一如 14.6 中的情形. P^* 的圆锥曲线束，即 $PQ(P^*)$ 的一条直线，称为圆锥曲线的**切束**. 这个切束称为满的，如果它在 16.5.1 的意义下对 P^* 来说是满的;满的切束构成五种类型，记为 I^*, II^*, III^*, IV^*, V^*. 下面的三个图都是在 P 中，而不是在 P^* 中作出的，而由定义，在 P^* 中它们将跟 P 中的 I, II, IV 的图形一致！ 在 P 中，类型 I 情形下的退化圆锥曲线表示为点对 $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, $\{c, c'\}$; 其余四种情形留给读者去讨论.

16.5.6.2 确切地说，我们并未画出类型 III^* 和 V^* 的情形，因为它们是跟 III 和 V 的图形一样的. 为了说明这一现象，我们提出下面这个问题：设 $\mathscr{F}$ 是 P 的一个圆锥曲线束(不是切束！). 对非退化的 $\alpha \in \mathscr{F}$，由 14.6.1 可知有 $\alpha^* \in PQ(E^*)$. 那么，这些 α^* 的集合是什么呢? 若在任一坐标系下，A 和 B 是定义 $\mathscr{F}$ 的矩

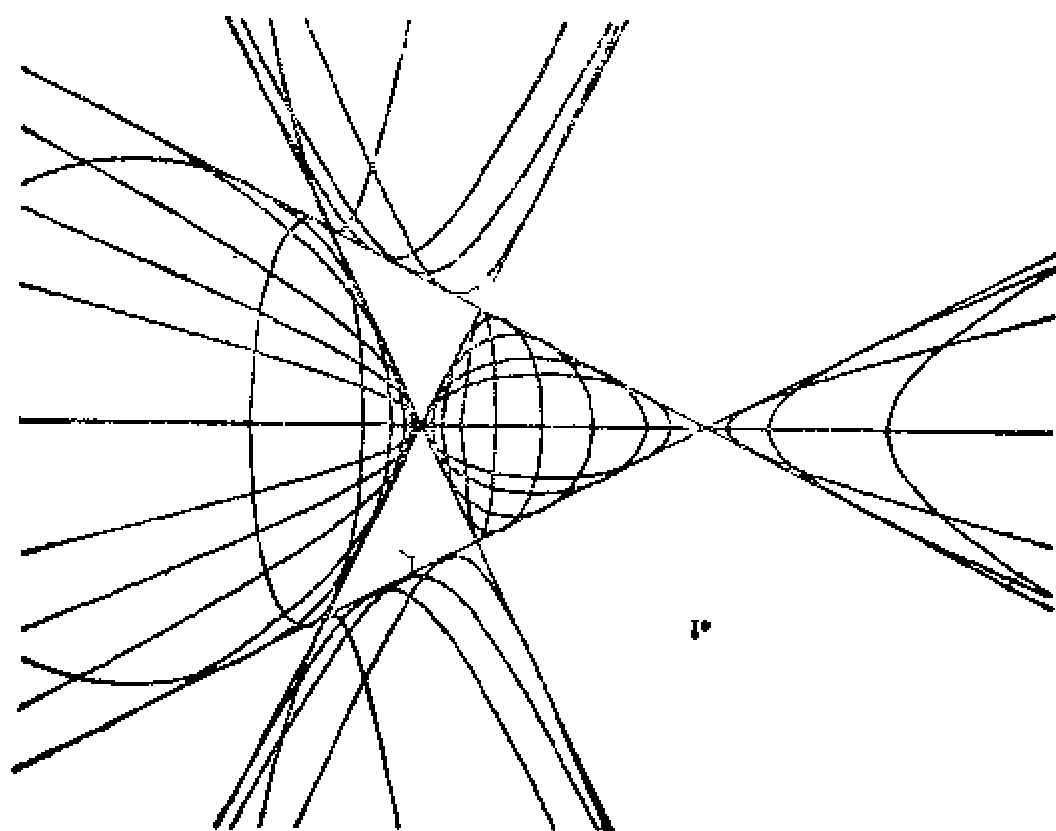


图 16.5.6.1.

阵，则由 14.6.1 可知所求的那些 α^* 的矩阵是 $(\lambda A+\mu B)^{-1}$，其中 λ, μ 使

$$\det(\lambda A+\mu B)\neq 0.$$

求逆矩阵的法则表明，$(\lambda A+\mu B)^{-1}$ 的系数都是 λ, μ 的二次齐次多项式乘以 $[\det(\lambda A+\mu B)]^{-1}$，因而可以去掉这个公因子而得到同样的圆锥曲线．于是，α^* 的集合包含在一个映射 $f\in \mathscr{P}_2^*(K^2; Q(E^*))$ 的象集中；这个映射形如 $\lambda^2U+\lambda\mu V+\mu^2W$，其

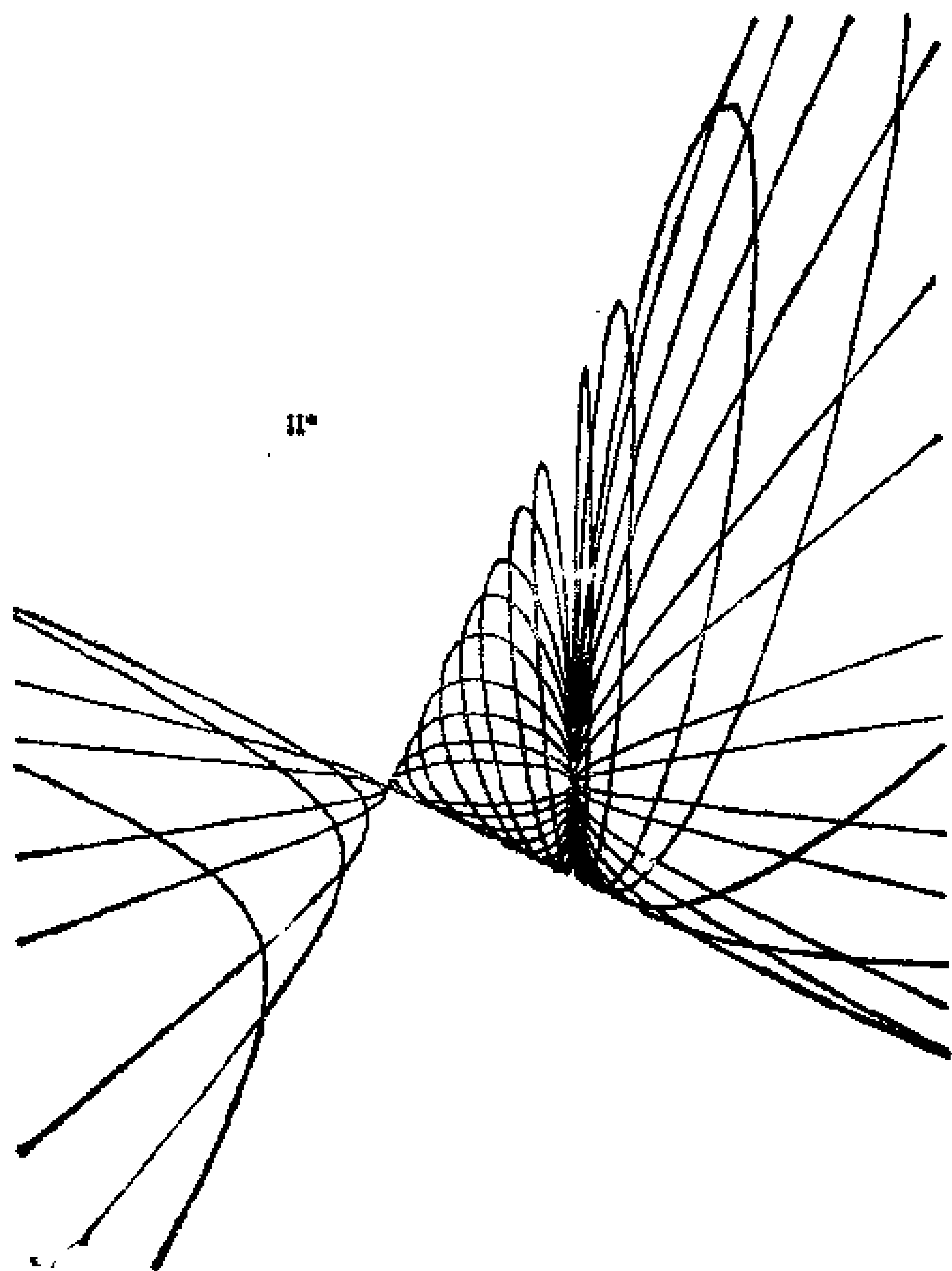


图 16.5.6.2.

中 U, V, W 是 $Q(E^*)$ 中三个向量，因而这个映射其实是在空间 $KU+KV+KW$ 中取值的。作 16.2.9 的证明中的商空间诱导映射后，我们看到我们的象集是 $PQ(E^*)$ 的一个射影平面中的一条圆锥曲线或一条直线。在 16.4.10 中所给出的坐标系中具体地就类型 I 到 V 算出逆矩阵，可以表明这个象集对类型 I, II, IV 而言是一条正常圆锥曲线，而对类型 III 和 V 是一条直线。因

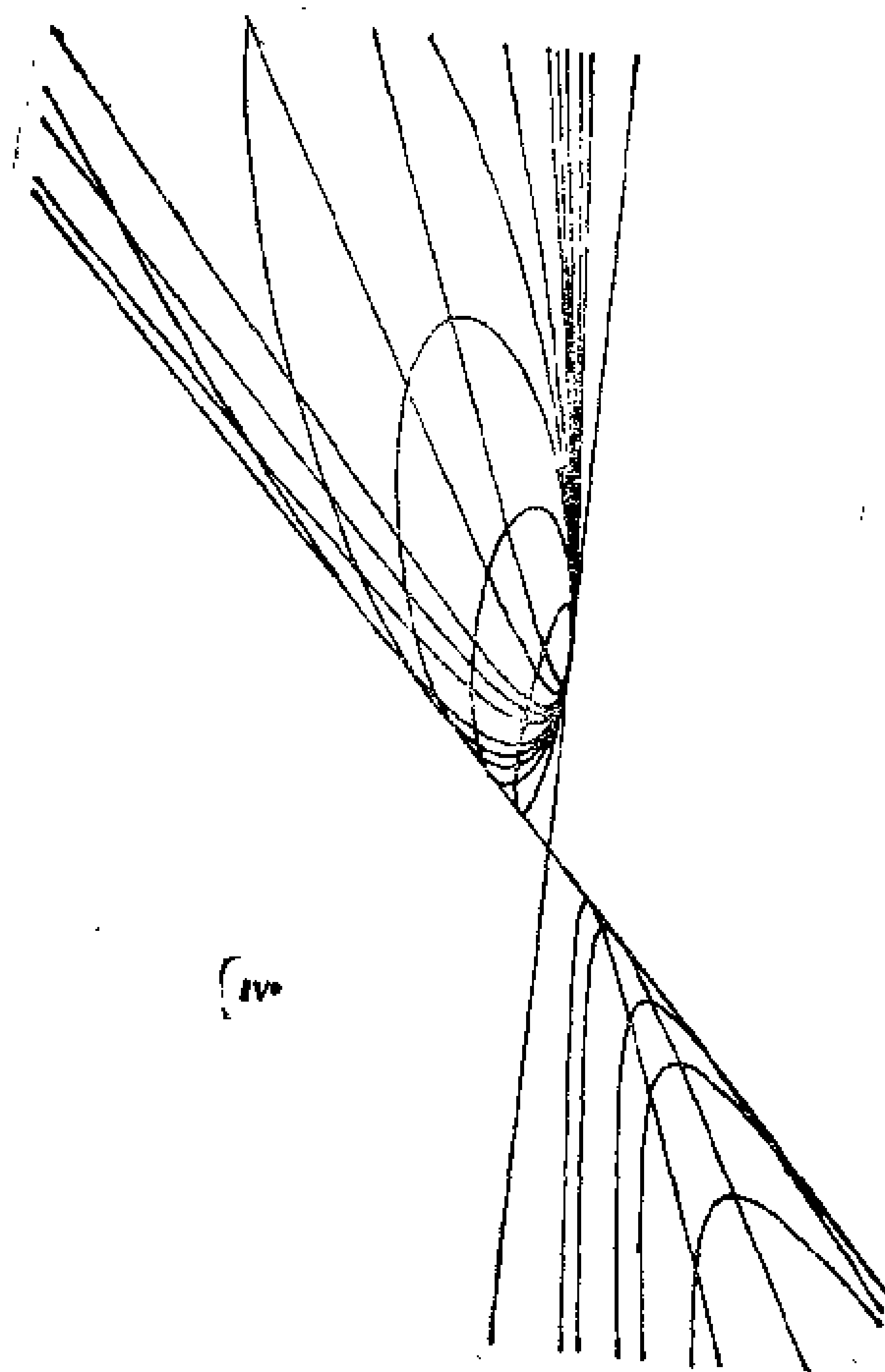


图 16.5.6.3.

而我们看到，类型 III 和 V 的那些圆锥曲线束也是切束（不过其中的退化圆锥曲线并不相同），而且类型 I 或 II 或 IV 的圆锥曲线束都是 $PQ(E^*)$ 的圆锥曲线；后一结论给出了 16.5.3.3 的另一种证明。我们也可以说，14.6.3.1 中引进的映射 $*: PPQ(E) \to PPQ(E^*)$ 可以沿 $PQ(E)$ 的某些直线自然地延拓。

16.5.6.3 Plücker 定理. 如果我们在 P^* 中进行 16.5.4 中的讨论，就可以看到：若 $\mathscr{F}^*$ 是 P 上圆锥曲线束，m 是 P 上一点，m 既不位于 $\mathscr{F}^*$ 的任一条公切线上，也不是 $\mathscr{F}^*$ 中某一圆锥曲线的退化点，则从 m 出发所作的 $\mathscr{F}^*$ 中圆锥曲线的切线构成一个 m^* 的对合(参见 16.2.1)。

例如(参见 16.5.5.2)，经过平面上每一适当的点，有一个切束中的两条或零条圆锥曲线(参见 16.5.6 的图)。

16.6 Poncelet 大定理

16.6.1 我们的目的是要证明，若 C 和 Γ 是两条圆锥曲线，使得存在一个 n 边形既内接于 C 又外切于 Γ，则另外还存在许多这样的多边形。这个结果的所有著名的证明都相当艰涩而冗长。我们将要给出的证明也未能脱出这一窠臼，它是由 Hart 提出的，我们采用的是 [LB2] 中第 116 页至 120 页的讲法。有些更简洁的证明——它们的基本思想是 Cayley 提出的——都用到跟一个圆锥曲线束相应的三次曲线；这时就必须知道可以将一个群的结构赋予这条三次曲线(参见例如 [FN]，第 124 页)，而且，如果我们知道了这条三次曲线通过椭圆函数所作的参数化映射(参见例如 [LG1]，第 12 页)，就得到了 Poncelet 定理的一个很深刻的解释。关于这方面，在 [GIS] 的 $I(d)$ 一节中有很近代的阐述。也可参见 16.6.12.4 的末尾。

另一种简洁明瞭地证明这一定理的方法是 Chasles 提出的，建立在“多义代数对应”概念的基础上，在目前的情形下是 (2, 2) 对应；这种方法是值得一提的，因为对应的概念近来有了重要的进

展．但是若要给出形式上严格而完整的叙述，(如对推论 16.6.1 而言，看来势必是很长的．读者可以通过研究下面两本参考书完成这一工作：[DE8]，第 1 卷，第 38—39 页，[DQ]，第 158—159 页．

16.6.2 跟我们通常的证明中 $K=\mathbf{C}$ 或为代数闭域的假定不同，我们现在采用一个任意域 K，虽然基数 $\geqslant 5$ 这一点是早在 16.4 开头就提出了的．我们下面用到的论断是对任何域都适用的，其中包括 $\mathbf{R}$：经过任一点，必有束中一条圆锥曲线，过某条圆锥曲线上一点的任一直线必与那条圆锥曲线交于另一点，且有 Desargues 对合 16.5.4.

16.6.3 证明的思想是对多边形的边数 n 作归纳法，但这是通过对一种更一般的情形得到的结果来实现的，那种情形处理的多边形内接于 C 而且各边分别跟与 Γ 一起构成圆锥曲线束的 n 条圆锥曲线 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$ 相切；我们的定理就是 $\Gamma_1=\cdots=\Gamma_n$ 的情形．这是一个很好的例子，说明有的结论推广后证明起来更容易．在下面，我们取定所考虑的射影平面上的一个圆锥曲线束 $\mathscr{F}$，以及一条有非空象集 C 的正常圆锥曲线 $\alpha\in\mathscr{F}$；我们下面考察的 $\mathscr{F}$ 中的圆锥曲线都是正常的、有非空象集的，从而由 16.1.4 可知它们可以等同于它们的象集，以后我们也总是这么做的．我们考察的所有的点都不属于束 $\mathscr{F}$ 的底，所有的直线都是关于 $\mathscr{F}$ 良好的(参见 16.5.4 和 14.2.7.3)．

16.6.4 **命题**．设 $a,b,c\in C$ 各不相同，$\Gamma,\Gamma'\in\mathscr{F}$ 且 Γ 切 ab 于 α，Γ' 切 ac 于 β；令 $\Delta=\alpha\beta$，则存在 $d\in C$ 使 Γ 切 cd 于 $\Delta\cap cd$，Γ' 切 bd 于 $\Delta\cap bd$；另外，还存在 $\Gamma''\in\mathscr{F}$，切 ad 于 $\Delta\cap ad$，切 bc 于 $\Delta\cap bc$．

设 $a,b,c,d\in C$ 各不相同，$\Gamma\in\mathscr{F}$ 切 ab 于 α，切 cd 于 γ；则存在 $\Gamma'\in\mathscr{F}$ 切 ac 于 $\alpha\gamma\cap ac$ (从而由本命题的第一部分可知它也切 bd 于 $\alpha\gamma\cap ac$)．

设 γ 是 $\Gamma\cap\Delta$ 上不同于 α 的一点，设 $\mathscr{G}$ 是由 Γ 和以 $\{ab\}\cup\{c\gamma\}$ 为象集的退化圆锥曲线构成的束；在直线 ac 上，两个圆锥曲

线束 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 给出同一个对合，即由下列两个二次超曲面定义的 ac 的二次超曲面束所相应的对合：象集为$\{a,c\}$的二次超曲面和限制 $\Gamma\cap ac$（参见 14.1.3.3 并注意到集 $\Gamma\cap ac$ 可能是空集，然而 $\Gamma\cap ac$ 确实可作为 ac 的二次超曲面）。

但是 ac 关于 $\mathscr{G}$ 的对合含有二重点 $\Gamma'\cap ac=\{\beta,\beta\}$；因此存在 $\Sigma\in\mathscr{G}$ 使 $\Sigma\cap ac=\{\beta,\beta\}$. 但又因 $\Sigma\cap\Delta=\{\alpha,\alpha\}$，就可知$\Sigma$是以 $\alpha\beta$（二重直线）为象集的退化圆锥曲线，而且 $\mathscr{G}$ 中所有的圆锥曲线与 $c\gamma$ 相切于 γ. 特殊地，Γ 在 γ 的切线经过 c. 下面只要置 $d=c\gamma\cap C$ 就可以了. 重复应用以上论证，不过把 a, b, c 换成 c, b, d，就可以看到 Γ' 也与 bd 在 $bd\cap\Delta$ 处相切. 然后在点 $\delta=ad\cap\Delta$ 对 $\mathscr{F}$ 中过 δ 点的圆锥曲线 Γ'' 进行相仿的论证即可

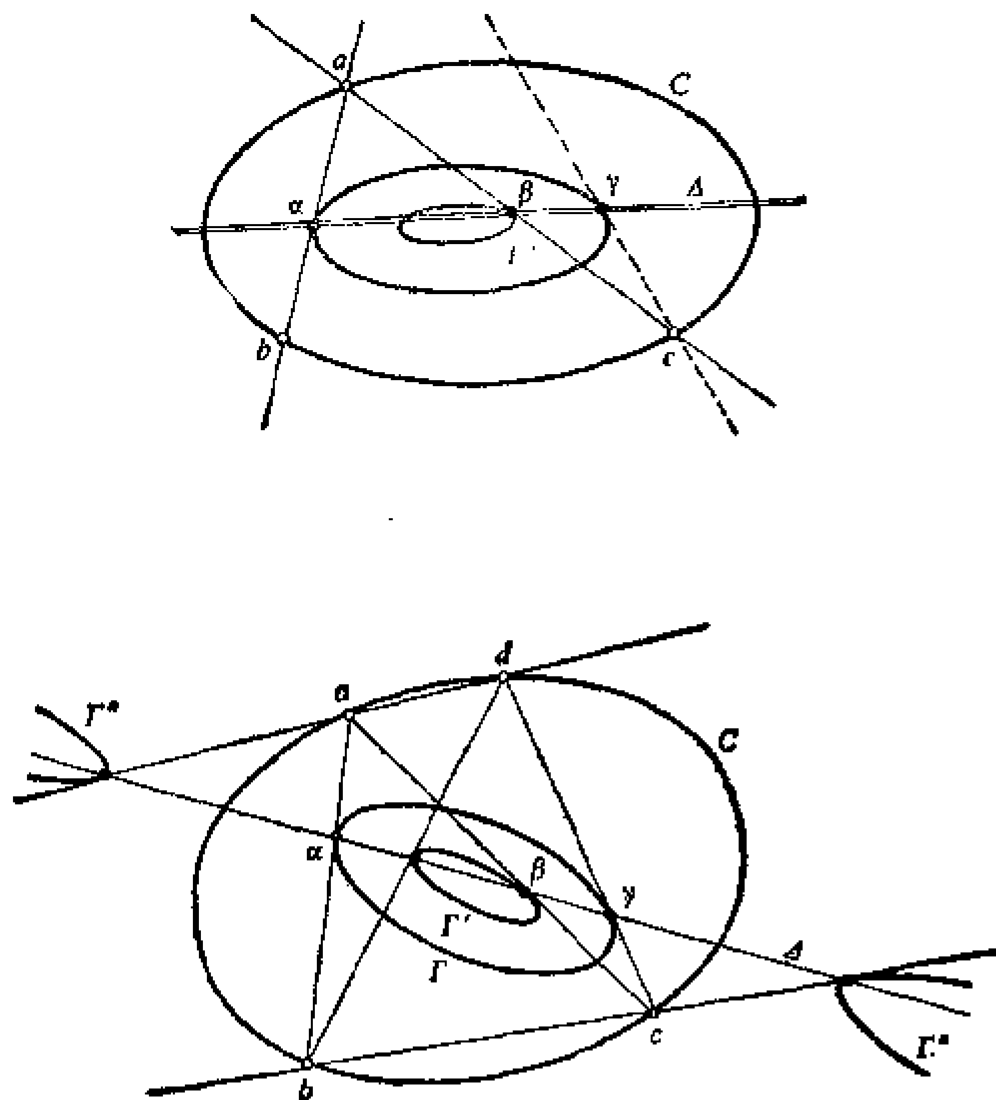


图 16.6.4.

推出，Γ'' 切 ad 于 δ；同样也切 bc 于 $\triangle\cap bc$。这样的论证也证明了命题的第一部分.

16.6.5 推论. 设 $a, b, c \in C$ 各不相同，$\Gamma', \Gamma'' \in \mathscr{F}$ 分别切 ab 于 γ，切 ac 于 β，则恰好存在两条与 bc 相切的圆锥曲线 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathscr{F}$，其中一条 Γ_1 切于 α_1 并使 α_1, β, γ 共线，另一条 Γ_2 切于 α_2 并使 $a\alpha_2, b\beta, c\gamma$ 共点. 对于各不相同的 $a, b, c \in C$ 和分别切 bc, ca, ab 于 α, β, γ 的 $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \in \mathscr{F}$，如果 $a\alpha, b\beta, c\gamma$ 是共点的，就称六元组 $(a, b, c, \Gamma, \Gamma', \Gamma'')$ 是正的.

Γ_1 的存在性可由 16.6.4 推出；Γ_2 的存在性可由 Γ_1 的存在和 16.5.5.2 推出，$a\alpha_2, b\beta, c\gamma$ 共点可由 6.7.2 和 6.4.5 推出.

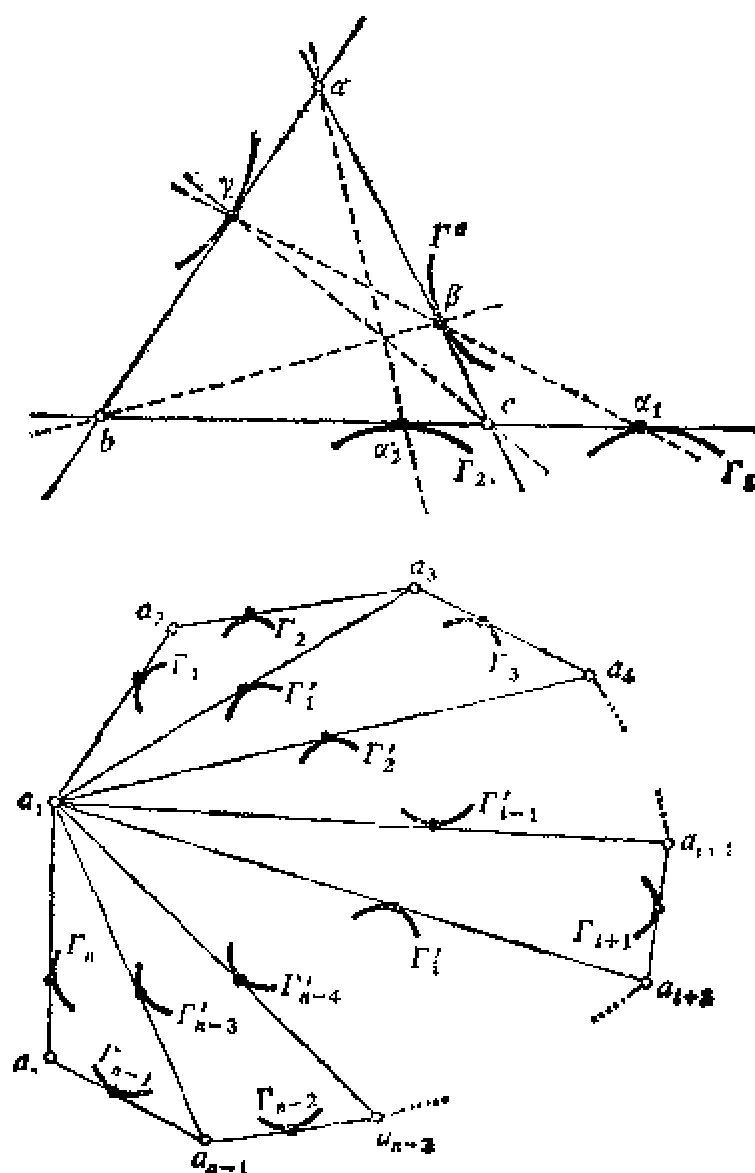


图 16.6.5.

16.6.6 设有 $2n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$，其中 $a_i \in C$ 各不相同，Γ_i 是 $a_i a_{i+1}$ 的切线 $\forall_i = 1, \cdots, n$（当然：$a_{n+1} = a_1$）。由 16.6.5，下列条件使我们可以用归纳法定义 $\Gamma'_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, \cdots, n-3)$：一开始，六元组 $(a_1, a_2, a_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$ 是正的；随后，六元组 $(a_1, a_{i+1}, a_{i+2}, \Gamma_{i-1}, \Gamma'_i, \Gamma'_{i-1})$ 是正的 $\forall i = 2, \cdots, n-3$。最后我们就得出一个定义好了的六元组 $(a_1, a_{n-1}, a_n, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n, \Gamma'_{n-3})$；我们称 $2n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 是正的，如果六元组 $(a_1, a_{n-1}, a_n, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n, \Gamma'_{n-3})$ 是正的。这样定义后，就可以叙述 Poncelet 定理如下：

16.6.7 定理. 设 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 是正的 $2n$ 元组，b'，$b'' \in C$ 各不相同并使 bb'' 相切于 Γ_1，则存在一个正的 $2n$ 元组 $(b_1, \cdots, b_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 使 $b_1 = b'$，$b_2 = b''$。

16.6.7.1 $n = 3$ 的情形. 主要思想是利用 16.6.4 来作相继的转移。设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 与 a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1 的切点，α' 是 $b'b''$ 与 Γ_1 的切点。16.6.4 的最后一部分表明，存在 $\Sigma \in \mathscr{F}$ 切 a_1b' 于 $\beta' = a_1b' \cap \alpha_1\alpha'$ 而切 $b''a_2$ 于 $\beta'' = b''a_2 \cap \alpha_1\alpha'$。根据 16.6.4 的第一部分，存在 $b''' \in C$ 使 Γ_2 也切 $b''b'''$ 于 $\alpha'' = b''b''' \cap \beta''\alpha_2$，而且 Σ 也切 a_3b''' 于 $\beta''' = a_3b''' \cap \alpha_2\beta''$。最后，16.6.4 的最后一部分表明，存在 $\Theta \in \mathscr{F}$ 分别切 a_3a_1 和 $b'''b'$ 于 $\lambda = a_3a_1 \cap \beta'''\beta'$ 和 $\mu = b'''b' \cap \beta'''\beta'$。剩下的只要证明 $\Theta = \Gamma_3$。我们用反证法证明这一点：直线 a_1b'，a_2b''，a_3b''' 不共点，因为它们都与 Σ 相切。将 5.5.1 用于两对三角形 $\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{\beta', \beta'', \beta'''\}\}$，$\{\{\beta', \beta'', \beta'''\}, \{b', b'', b'''\}\}$，就知 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ 也好，α', α'', μ 也好，都是不共线的。因为假定了 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不共线，由 16.6.5 就推得 $\lambda = \alpha_3$，因此 $\Theta = \Gamma_3$；但因 α'_1, α''，μ 不共线，就知六元组 $(b', b'', b''', \alpha', \alpha'', \mu)$ 是正的。

16.6.7.2 对 n 作归纳. 这是直接由 16.6.7.1 和 16.6.6 中的构造作出的。由那里的构造可知 $(a_1, a_2, a_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$ 是正的，根据 16.6.7.1，从它可导出一个正的六元组 $(b_1 = b', b_2 = b'', b_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$；然后从 $(a_1, a_3, a_4, \Gamma_3, \Gamma'_2, \Gamma'_1)$ 可导出一个正的六元

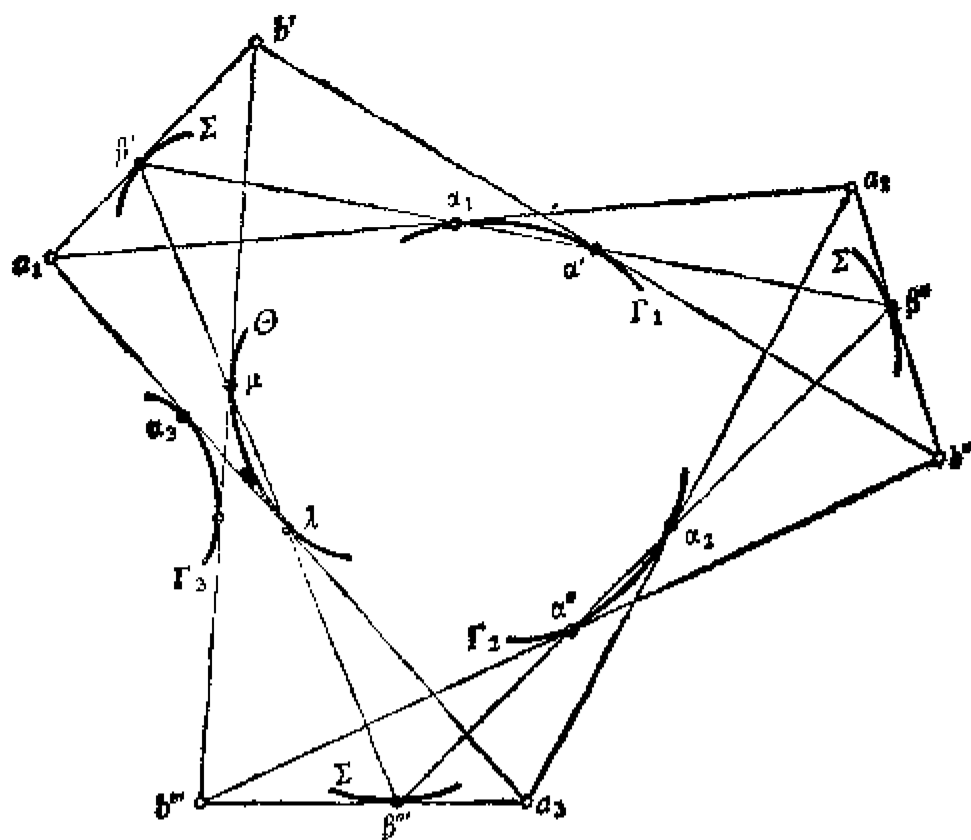


图 16.6.7.

组 $(b_1, b_3, b_4, \Gamma_3, \Gamma_2', \Gamma_1')$，等等……，最后得出的 $2n$ 元组 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 根据定义是正的.

16.6.8 注. 若K是任意域，不一定存在与 a_1a_2 不同的 $b'b''$ 跟 Γ_1 相切，其中 b', $b''\in C$ 且 $b'\neq b''$，而且对任一给定的 $b'\in C$ 都是如此；例如可参见图 16.6.12. 然而当K是代数闭域时就不会有这个问题. 若 $K=\mathbf{R}$，我们仍然可以看到对充分邻近 a_1 的每一 $b'\in C$，总能找到另一点 $b''\in C$，使 $b'b''$ 跟 Γ_1 相切. 因此，在上述两种情形下，我们推出：若有一个正的 $2n$ 元组，则存在一个这种 $2n$ 元组的不可数族.

16.6.9 现在我们回头讨论最初提出并引发出 16.6.7 的问题，即跟那些内接于 C 而外切于 Γ 的多边形相对应的形如 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma, \cdots, \Gamma)$ 的 $2n$ 元组的问题；我们注意到，对于由C和 Γ 定义的圆锥曲线束 $\mathscr{F}$ 来说，$\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\in\mathscr{F}$ 的条件自然是满足的. 不过，我们还得验证：

16.6.10 引理. $2n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma, \cdots, \Gamma)$ 必为正的.

根据16.6.5，存在一个正的 $2n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma, \cdots, \Gamma, \Gamma')$；若对这个 $2n$ 元组应用 16.6.7 并置 $b'=a_2$, $b''=a_3$，就必定得出一个 $2n$ 元组$(a_2, \cdots, a_n, a_1, \Gamma, \cdots, \Gamma, \Gamma')$，这是因为过一点只能向一条圆锥曲线引两条不同的切线。由此可知 a_1a_2 也与 Γ' 相切；对 $a_2a_3, \cdots$ 也有同样的结论。于是 Γ 和 Γ' 有 n 条相异的公切线 $a_ia_{i+1}(i=1, \cdots, n)$，可见 $n\geqslant 5$ 时 $\Gamma=\Gamma'$（参见 16.1.4）。剩下的是 $n=3$ 和 $n=4$ 的情形；$n=3$ 的情形如图 16.2.13 所示(也可参见 16.8.2)。$n=4$ 时，利用配极变换可以证明图 16.6.10 中的共线性；而这就表示两个六元组 $(a_1, a_2, a_3, \Gamma, \Gamma', \Gamma)$ 和 $(a_1, a_3, a_4, \Gamma, \Gamma, \Gamma)$ 都是正的。

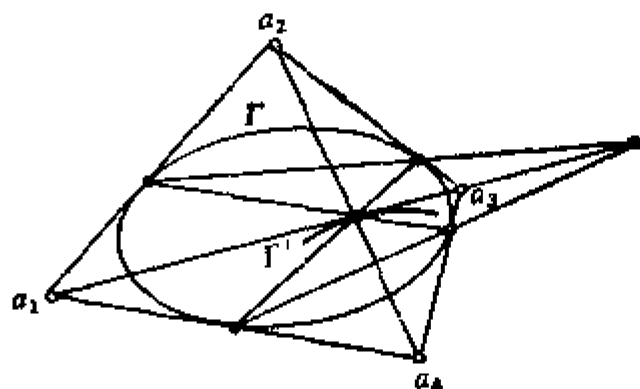


图 16.6.10.

16.6.11 推论. 设$(a_1, \cdots, a_n)$是一个有 n 个不同顶点的多边形，内接于圆锥曲线C而外切于圆锥曲线Γ，则只要有 $b', b''\in C$ 使 $b'\neq b''$且$b'b''$相切于Γ，就必定存在一个多边形$(b', b'', b_3, \cdots, b_n)$ 内接于C而外切于Γ. 特别当 $K=\mathbf{C}$ 或$\mathbf{R}$时，存在不可数无穷多个这样的多边形.

关于存在性，可见 16.6.12.4 和 17.6.7.

16.6.12 评注

16.6.12.1 参阅 17.6.5 中 C 与 Γ 共焦的很有意义的情形.

16.6.12.2 若 (a_i) 是内接于 C、外切于Γ 的，则 16.6.7 表明所有的直线 $a_ia_{i+2}(i=1, \cdots, n)$ 都与C和 Γ 定义的束 $\mathscr{F}$ 中的同一条圆锥曲线 Γ_1 相切（可如 16.6.10 中的证明一样地进行论

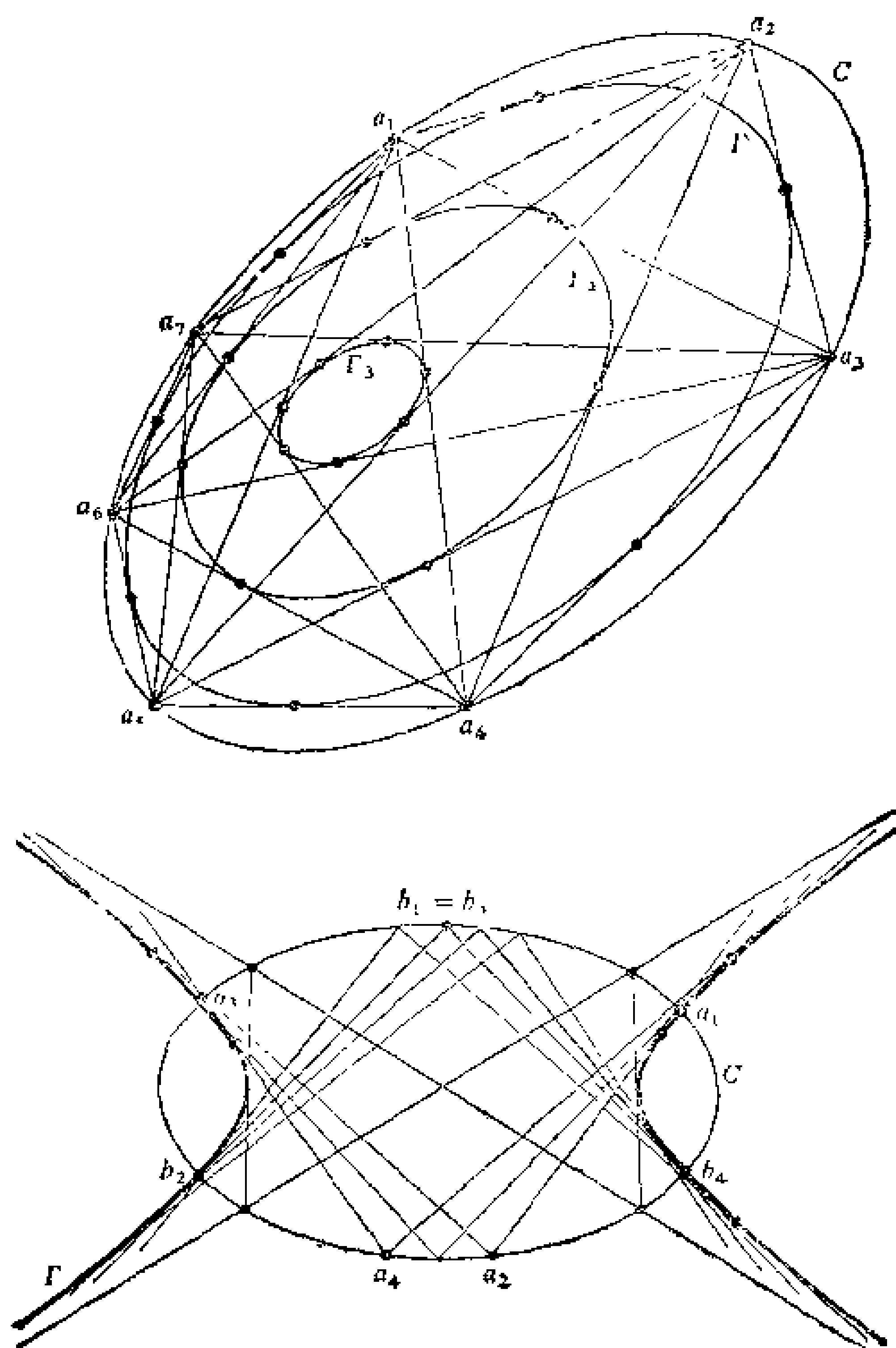


图 16.6.12.

证). 同样地，所有的 a_ia_{i+3} 都相切于一条 $\Gamma_i\in\mathscr{T}$，等等…．正多边形跟同心圆的类比似乎可以告诉我们，在我们所考虑的图形上有一个跟关于这些圆的圆心的旋转群相类似的群. Poncelet 定理最本质的困难在于，这样一个群存在，但它并不对应于 $\mathfrak{S}_X$ 的

任何子群．关于这个群，参见 16.6.1．

16.6.12.3 在一些不同的情形下，Poncelet 多边形可能以某些 a_i 相等时的很有趣的退化形式出现；参见［LB2］第 142 页以及图 16.6.12．

在这个图中，当 b_2 和 b_4 都是 C 和 Γ 的公共点时，四边形 (a_1, a_2, a_3, a_4) 退化为 (b_1, b_2, b_1, b_4)；还可以注意到四边形中两边为 Γ 的渐近线时的情形．

16.6.12.4 Cayley 已经知道为使一个内接于 C、外切于 Γ 的 n 边形存在，C 和 Γ 的方程应满足什么显式的条件．若 A, B 是代表 C 和 Γ 的矩阵，我们在形式上把函数 $\sqrt{\det(A+\lambda B)}$ 关于 λ 展开：

$$\sqrt{\det(A+\lambda B)}=\sum_{i=0}^{\infty}\sigma_i\lambda^i.$$

于是所求的条件可用行列式写作：

$$\begin{vmatrix}\sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{p+1}\\ \sigma_4 & \sigma_5 & \cdots & \sigma_{p+2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{p+1} & \sigma_{p+2} & \cdots & \sigma_{2p-1}\end{vmatrix}=0,\ n=2p \text{ 时；}$$

$$\begin{vmatrix}\sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{p+1}\\ \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{p+2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{p+1} & \sigma_{p+2} & \cdots & \sigma_{2p}\end{vmatrix}=0,\ n=2p+1 \text{ 时．}$$

我们希望读者写出这些条件中的前几个条件，首先是当 A 和 B 都是对角阵的情形，这就是例如说 17.6 的共焦圆锥曲线的情形；然后是两个圆的情形，并与 10.13.3 所得结果作一比较．关于 Cayley 这些公式的证明，可见［LB2］或一本很新的参考书 [GR-HA]．

16.6.12.5 关于 Poncelet 定理，也可参阅［B-H-H］．

16.7 仿射圆锥曲线

16.7.1 方程. 大致上仍援用15.1中的记号，不过我们在这里碰到的是一个仿射平面 X. α 的一个方程可写为

16.7.1.1 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$;

如果 $\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0$，则圆锥曲线 α 是正常的. 它在无穷远处的点(参见15.1.3.2)由

$$ax^2+2bxy+cy^2=0 \text{ 或 } cm^2+2bm+a=0$$

给出，后一式中我们用 m 表示一条直线的斜率，这是很方便的；只要再把 $m=\infty$ 的情形也补上就行了(例如参见5.2.4). 例如，若 $K=\mathbf{R}$ 且 $C=\mathrm{im}(\alpha)\neq\emptyset$，$\alpha$ 正常，则(参见15.3.3.2)这个象当 $ac-b^2>0$ 时是一个椭圆，$ac-b^2=0$ 时是一条抛物线，$ac-b^2<0$ 时是一条双曲线. 16.7.1.1的中心，根据15.5.5.2可知是由 $ax+by+d=0$，$bx+cy+e=0$ 给出的. 求渐近线时可利用14.5.3.

16.7.2 良好参数化映射. 由16.2.6可知，C 与一条绕 $a\in C$ 转动的动直线 D 相交；我们可取 D 的斜率 m 作为 $\tilde{R}=K\cup\infty$ 中的参数. 根据16.2.9，结果总是形如

$$x=\frac{um^2+u'm+u''}{wm^2+w'm+w''},\quad y=\frac{vm^2+v'm+v''}{wm^2+w'm+w''}$$

的. 一种特殊的情形是：当 C 是双曲线或抛物线时，取 $a\in\infty_X\cap C$，也就是说用适当的平行线来截割 C；这时就得出熟悉的函数 $x\longmapsto\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 和

$$x\longmapsto\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},$$

它们的图象是抛物线和双曲线. 也可参见17.7.1和17.8.2.

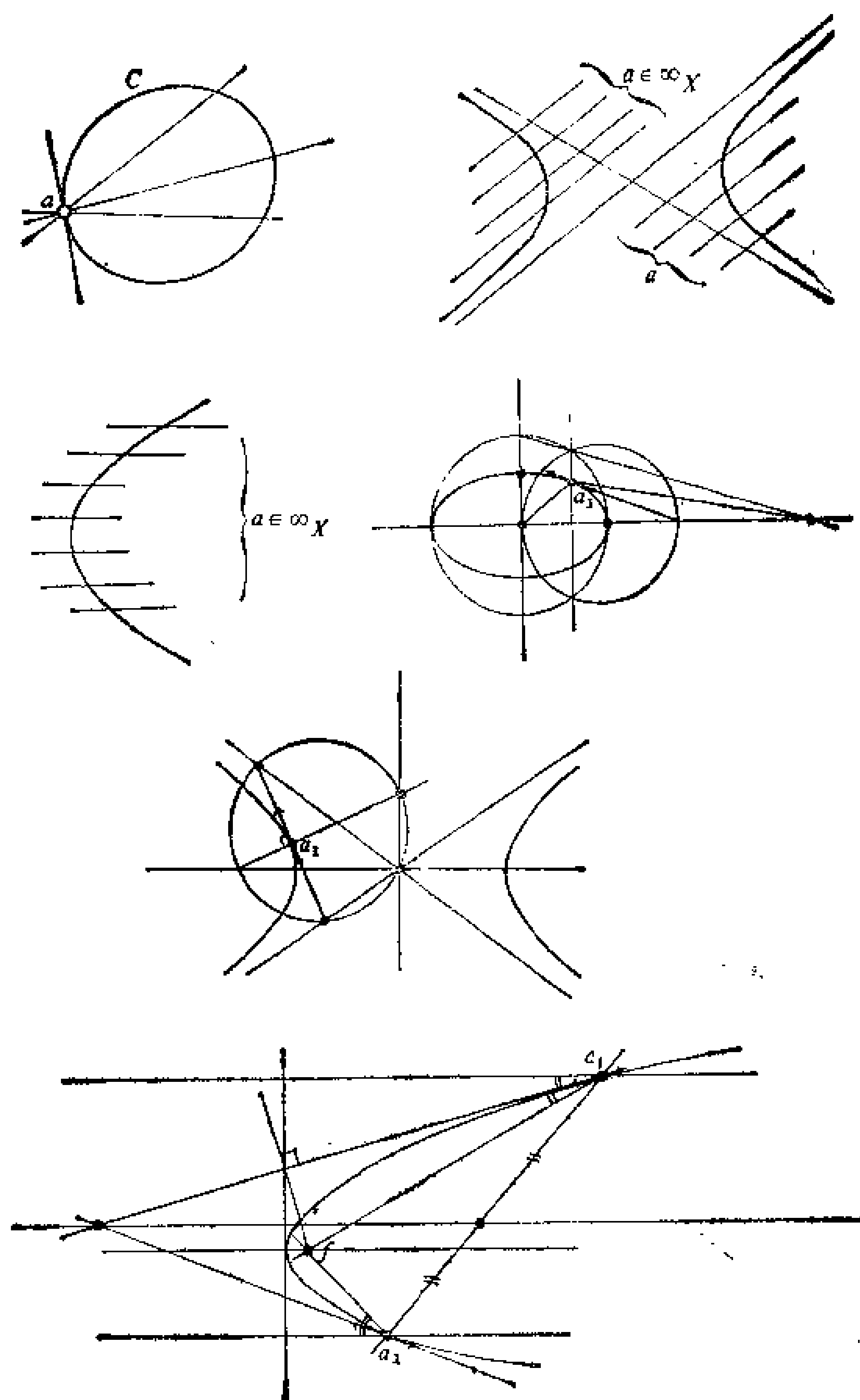


图 16.7.2.

16.7.3 过五点的圆锥曲线的结构. 16.2.11 和 16.2.13 两图说明了对经过 C 上一个已知点的任一直线 D，怎么找到 $C\cap D$ 和在该点的切线. 从 15.5.6 可以得出 C 的所有直径，从而圆心就作为两条直径的交而得出(参见图 16.7.3). 有了中心、两个点和在这两点处的切线后，就可以得出共轭方向的对合(参见 15.6.3 和 15.7.5)，从而根据 16.3.10.2 的结构就可得出 C 的轴的方向，这个做法对任一 X 上的欧氏结构都是可行的，在实用中画图的那张纸和标尺的长度单位就决定了这个欧氏结构. 有了轴(参见 15.6.8)、一个点和在这点处的切线后，由 17.7 和 17.8 就可易见地可决定顶

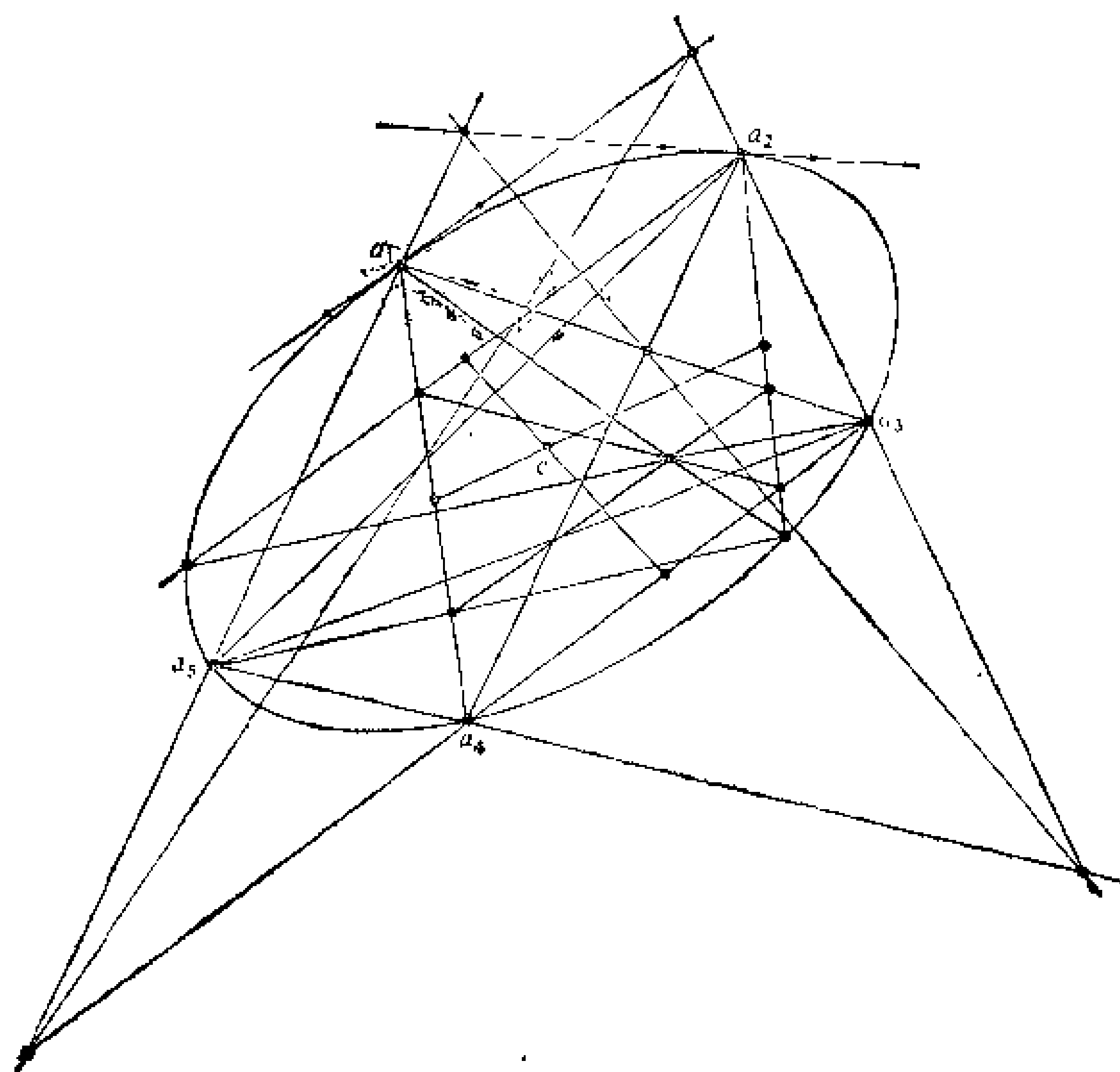


图 16.7.3.

点等等…．如果我们考虑的是一条抛物线，有两个点和在这两点处的切线就足够了，参见下段．

16.7.4 与四条直线相切的抛物线． 根据 16.1.4 和对偶原理可知，存在唯一的一条圆锥曲线与 X 上给定的四条直线 D_i（相互不平行，任何三条不共点）以及 X 的无穷远直线 ∞_X 相切，即与 D_i 相切的一条抛物线．为了用欧氏几何的作图法来决定这条抛物线，我们在和图 16.2.13 对偶的图上作出它与 D_1 和 D_2 的切点．于是我们利用 15.5.8 来得出轴的方向；然后根据 17.9.18.1 就能作出图来．

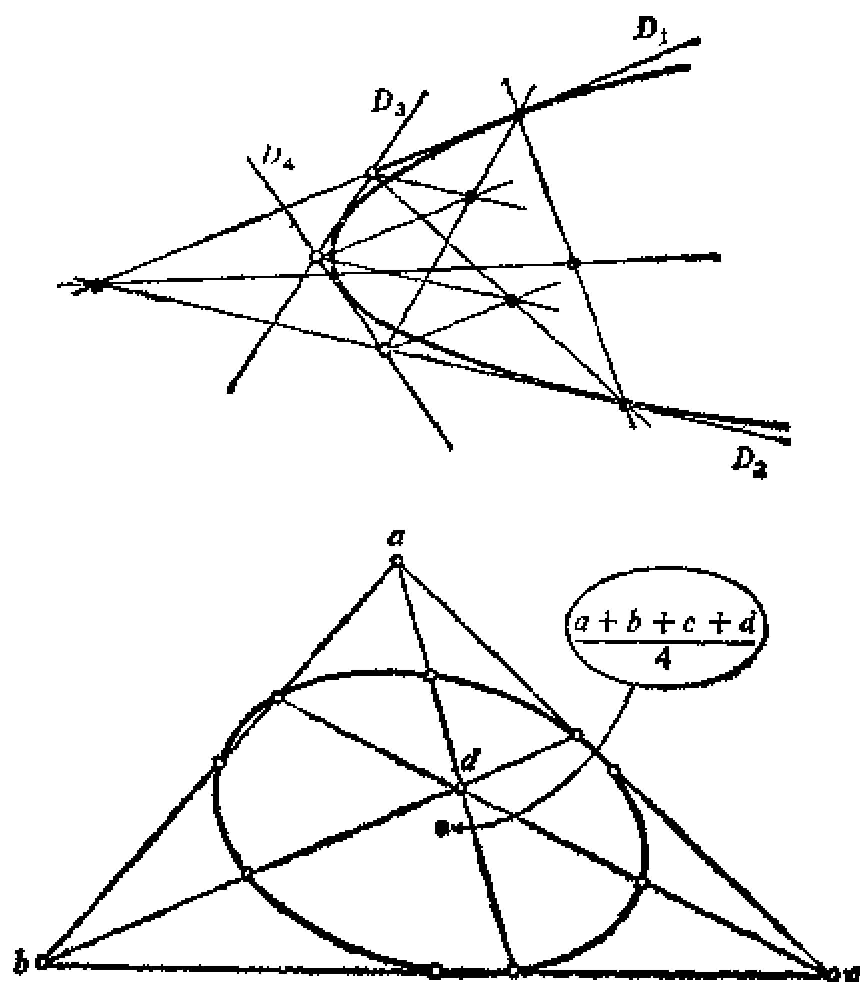


图 16.7.4.

16.7.5 九点圆锥曲线． 把 16.5.5.1 换成仿射的说法，就可以对 $a, b, c, d \in X$ 得出一条经过 p, q, r 和 ab, ac, ad, bc, bd, cd 的六个中点的圆锥曲线；它在无穷远处的点就是 $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{cd})$，$(\overrightarrow{ad}, \overrightarrow{bc})$，$(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{db})$ 决定的 ∞_X 的对合的二重点，因此在几何上很容易

做出(参见 16.3.10). 另外, 由 3.4.10 和 15.7.7 可知, 这条圆锥曲线的中心是 $\frac{a+b+c+d}{4}$. 当 d 是 $\{a, b, c\}$ 的垂心时,就是九点圆的特殊情形,参见 10.11.3 和 17.5.4.

16.8 练习

16.8.1 证明: 对一条正常圆锥曲线的象集 C 上的四点 a, b, c, d, $[a, b, c, d] = -1$ 的充要条件是 $ab \perp cd$.

16.8.2 证明: 若 a, b, c 组成 C 的外切三角形,切点为 α, β, γ, 则 $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ 共点(参见图 16.2.13); 这一证明应该只用解析几何.

16.8.3 **Steiner 与 Pascal 直线.** 设 C 是正常圆锥曲线, $a_i (i = 1, \cdots, 6)$ 是 C 上的点;由 16.2.11 可知对这些 a_i 组成的每个六点组(顺序任取),有一条相应的直线, 称为这个六点组的 Pascal 直线. 证明: 对 C 上给定的六个点,至多存在 60 条 Pascal 直线;举出一个确实有 60 条不同的 Pascal 直线的例子. 证明: 这些直线是三三共点的,因而我们得出 20 个点, 它们包含在关于 C 共轭的 10 个点对中.

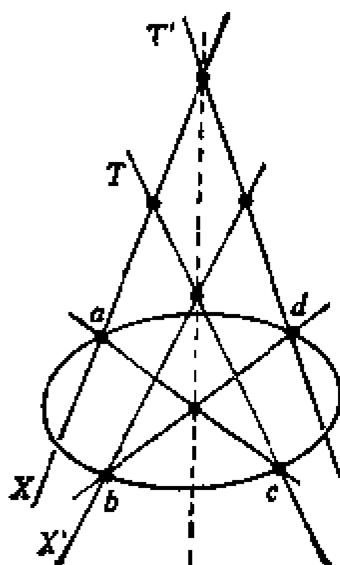


图 16.8.4.

16.8.4 设C是正常圆锥曲线的非空象集；将P嵌入一个三维射影空间$\hat{P}$中. 证明：存在一个方程为中性的(参见14.4)二次曲面，其象Q使得 $C = Q \cap P$. 设 a, b, c, d 是C上四点，X, X' 是母线族Ξ中过 a, b 的母线(参见14.4)，T, T' 是母线族Θ中过 c, d 的母线. 证明： $ac \cap bd, X \cap T', X' \cap T$ 这些点是共线的. 从中引出 Pascal 定理的一种证明. 并用这种方法来讨论前面的练习.

16.8.5 取给定六点中的四点所构成的射影标架，来证明 Pascal 定理.

16.8.6 设 C 是正常圆锥曲线的非空象集，且 p, q, r 使得C与 pq 在q相切，与 pr 在r相切. 证明：只要 $m, n \in C$，就有

$$[q, r, m, n]_c^2 = [pq, pr, pm, pn].$$

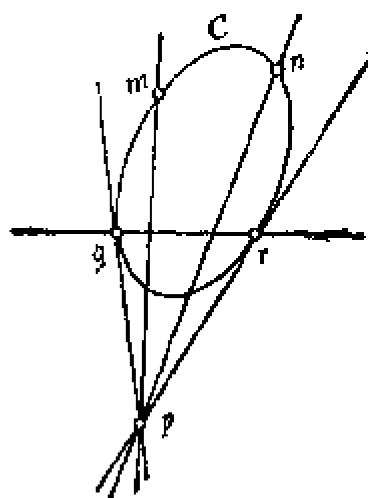


图 16.8.6.

16.8.7 证明：一条有非空象集的正常圆锥曲线的两个对合是可交换的充要条件是它们的 Frégier 点共轭.

16.8.8 设f是一个不是对合的单应，$f \neq \mathrm{Id}_C$，其中C是一条正常圆锥曲线的非空象集. 证明 $\{\langle m, f(m)\rangle; m \in C\}$ 是一条双切于C的圆锥曲线的切线的集合. 反之亦然. 对两条双切的圆锥曲线，利用上述结论给出16.6中那些结论的简捷证明.

16.8.9 定义并讨论一个圆锥曲线束中四条圆锥曲线的交比.

16.8.10 讨论图 16.5.6 中区域变化的情形.

16.8.11 说明图 16.4.10.5, 16.4.10.6 和 16.4.10.7 各图的作法是合理的.

16.8.12 对跟 16.5.6.2 对偶的圆锥曲线束进行具体的计算.

16.8.13 当 $n=2p$ 时, 在一个外切于 Γ、内接于 C 的 n 边形中连接相隔 p 个顶点的顶点所得的直线有什么性质?

16.8.14 证明: 在切束的类型 IV* 的情形下, 有一点是密切点.

16.8.15 **$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 时圆锥曲线束的分类.** 在 $K=\mathbf{R}$ 时, 给出圆锥曲线束的一个分类(参见 [LY], 第 259 页).

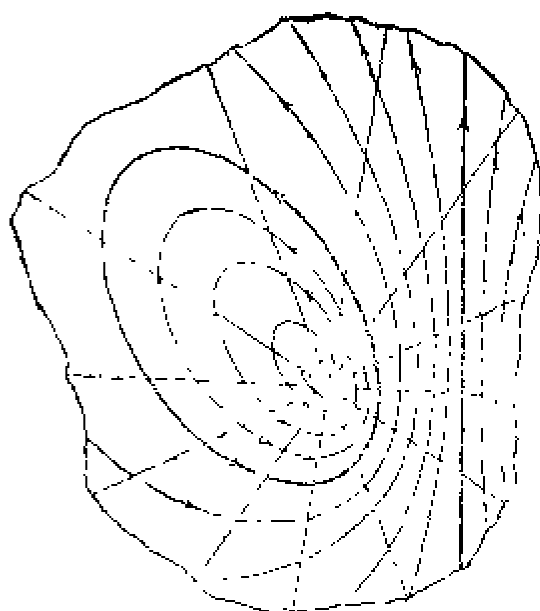


图 16.8.15.

16.8.16 当 K 只含三个元素时, 讨论 $xz-y^2=0$ 和 $xy+z^2=0$ 的交点.

16.8.17 域 K 含七个元素; 证明 $xz-y^2=0$ 和

$$2x^2+z^2-2xy-yz=0$$

(相应地: $x^2+4yz=0$ 和 $z^2+xy=0$) 有唯一的公共点, 而且它们所定义的圆锥曲线束只含唯一的一条退化圆锥曲线(相应地: 没有退化的圆锥曲线).

16.8.18 由 16.2.3 推出 16.1.4.

16.8.19 用 16.8.4 的方法证明 Pappus 定理.

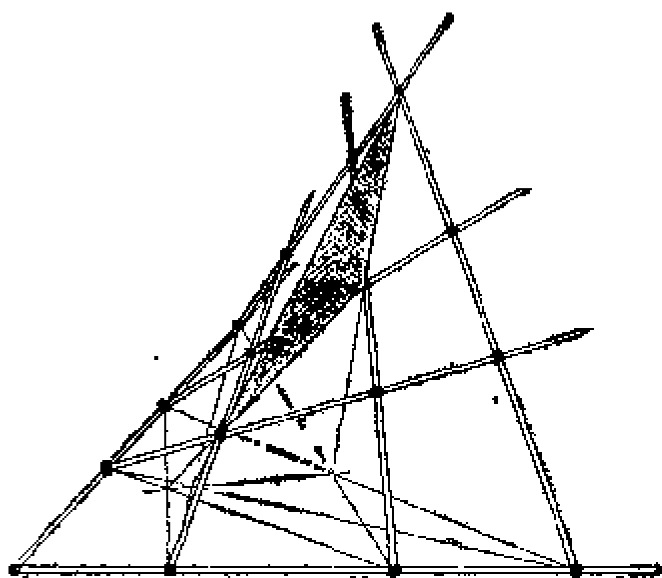


图 16.8.19.

16.8.20 设 $D_i (i = 1, \cdots, 6)$ 是跟同一条圆锥曲线相切的六条直线;证明: 若 φ_i 是 D_i 的方程, 则 φ_i^2 在 $Q(E)$ 中是线性相关的(参见 13.1.3.3).

16.8.21 讨论在 16.5.6.2 所引进的映射 $\mathscr{F} \to \mathrm{PQ}(E^*)$ 下 $\mathscr{F}$ 中退化圆锥曲线的象集.

16.8.22 具体作出经过仿射平面上给定的四点的抛物线.

16.8.23 是否存在一对圆锥曲线,它们有四个不同的公共点,但没有四条不同的公切线?

16.8.24 在齐次坐标下具体计算一个简单的二次变换.

第 17 章　欧氏圆锥曲线

本章应用前几章中的结果来研究欧氏平面上的圆锥曲线：椭圆，双曲线，抛物线．通过很初等的讨论就可以看出，这些圆锥曲线(圆除外)可以定义为到一个点(焦点)和一条直线(准线)的距离之比为常数的点的集合；同时，除抛物线外，又可以定义为到两点的距离之和(或差)为常数的点的集合（17.2 节）．

这些性质自古以来就是人所熟知的；但是，找出它们之间的一个深刻而统一的解释，却是一项很有吸引力的工作；这就是十九世纪的几何学家所作的，我们将在 17.4 中加以阐述．然后，我们利用 17.4 的方法，从第十六章的射影的结论导出许多关于欧氏圆锥曲线的结论，这是 17.5 和 17.6 的内容．Poncelet 大定理被用于讨论内接于椭圆的最大周长多边形；一个出乎意外的结果是：这样的多边形的个数是无穷的．

最后两节 17.7 和 17.8 不加证明地叙述一些专门关于椭圆、双曲线(包括等轴双曲线)的结论．其实，我们认为，读者在前面各章中已积累了各种不同的方法，也许会有兴趣考虑一下哪种方法可以用来证明其中哪个结论．

关于欧氏圆锥曲线的其它结果，可参见 [EE]，[DQ]，[ML]．

在整个这一章中，X 表示一个欧氏仿射平面，$\tilde{X}$ 是 X 的射影完备化空间，$\tilde{X}^C$ 是 $\tilde{X}$ 的复化射影空间(参见 7.6)，I, J 是 X 的循环点(参见 9.5.5.1)．若不作另外申明，C 总表示 X 上一条正常圆锥曲线的非空象集；根据 16.1.4，可将 C 和以它为象集的圆锥曲线 α 等同起来．

17.1 Descartes 原理

17.1.1 根据 15.6 和 15.3.3.2 中的定义，我们可以找到一个标准正交标架，使 C 的方程为

17.1.2
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \quad (a\geqslant b) \quad (\text{椭圆}),\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad\qquad (\text{双曲线}),\\ y^2-2px=0 \qquad\qquad\qquad (\text{抛物线}).\end{cases}$$

17.1.3 注意 $a=b$ 时椭圆就变成了圆．而 $a=b$ 时的双曲线，按

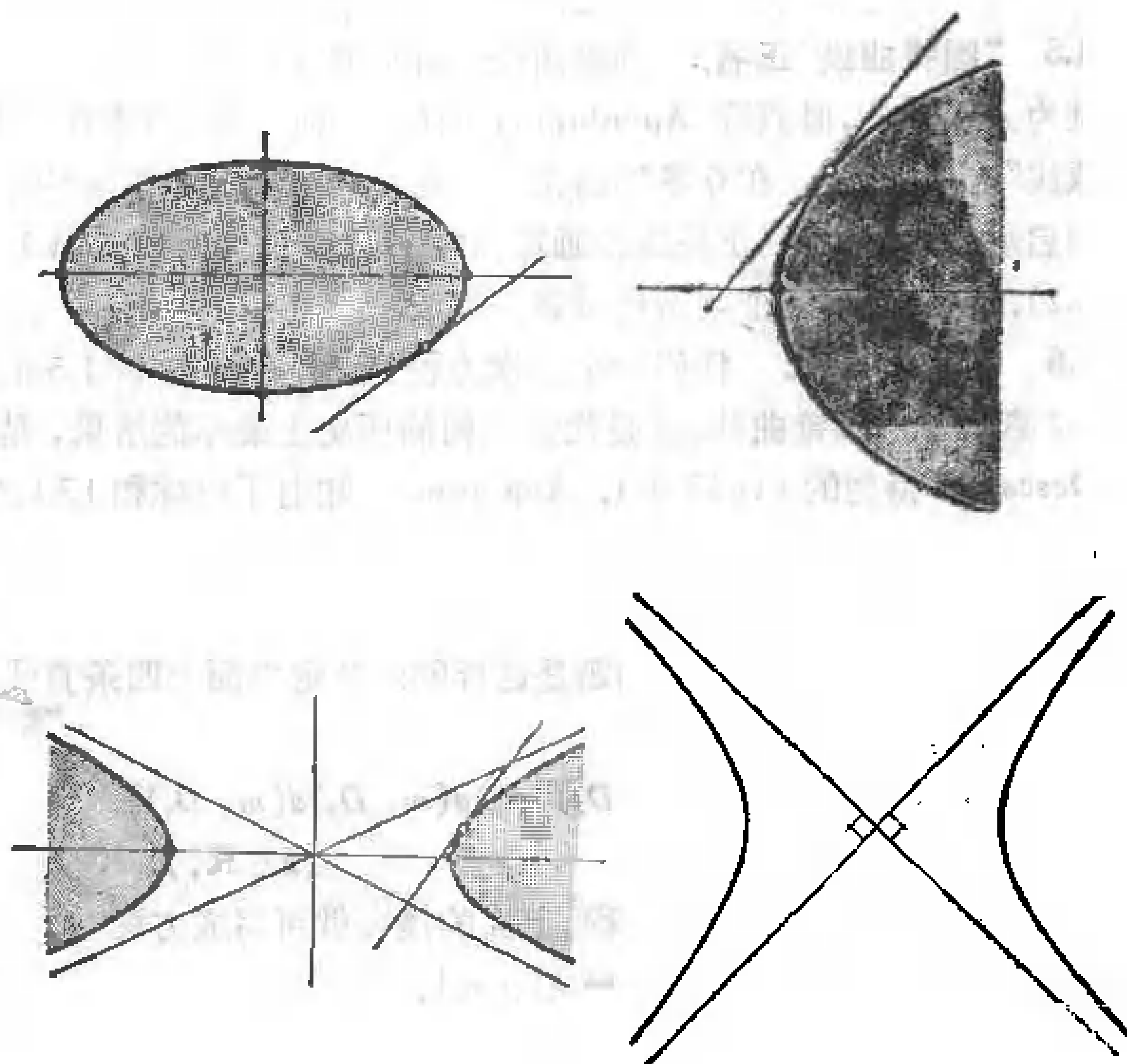


图 17.1.3.

定义叫作等轴双曲线；它们总是渐近方向正交的双曲线；正如圆比之于椭圆一样，等轴双曲线比之于一般的双曲线具有更多的性质：例如可见 17.8.3. 位于轴上的点称为顶点；椭圆有四个顶点，双曲线有两个，抛物线有一个.

17.1.4 切线，凸性，法线. 根据 15.4.6，椭圆和抛物线总是凸集的边界；双曲线的两个凸分支，各是一个凸集的边界. C 在 m 处的切线，可以定义为 m 的极线(参见 14.5.2.1)，也可以定义为 C 作为 C^∞ 子流形的切空间 (参见 14.3.8) 或者参数弧段 C 的切线 (参见 16.2.9)，或者还可定义为 C 的连通分支所围成的严格凸集在 m 点的唯一支撑线(参见 11.6.4)，所有这些定义都是一致的.

C 在 m 处的切线在 m 处的垂线，称为 C 在点 $m\in C$ 处的法线.

17.1.5 "圆锥曲线"正名. 圆锥曲线，好象是从公元前四世纪以来就为人所知的，但直到 Appolonius 时(公元前二世纪)才有"圆锥截线"这个名称. 在众多的结论中，这一名称受的是下面的事实的启示：圆锥曲线正是旋转圆锥面的平面截线 (见图 17.3.1，17.3.2). 这一事实的证明留待读者去完成.

17.1.6 "四线轨迹". 任何一个二次方程给出一条在 17.1.5 或 17.1.2 意义下的圆锥曲线，这是代数几何的历史上最早的结果，是由 Descartes 得到的 (1637 年). Appolonius 知道了坐标和 17.1.2 中的方程. 但是 Descartes 能定义出 n 次曲线.这一方法的有力，可以通过解决下面这个自古希腊时代以来悬而未决的问题得到说明；这个称为"四线轨迹"的问题是这样的：给定平面上四条直线 $D_i(i=1,2,3,4)$ 后，求集合

$$\{m\in X: d(m,D_1)d(m,D_2)=kd(m,D_3)d(m,D_4)\}\quad (k\in\mathbf{R}_+^*).$$

而若 $\varphi_i=0$ 是 D_i 的一个方程，上面的集合就可写成方程

$$|\varphi_1\varphi_2|=k|\varphi_3\varphi_4|,$$

于是它由以 $\varphi_1\varphi_2\pm k\varphi_3\varphi_4=0$ 为方程的两条圆锥曲线组成 (Descartes 当时漏掉了一条). 可以注意到，当 k 变动时，这些圆锥曲线构成一个圆锥曲线束(参见 16.4.10). 试与 [I-R] 第 367 页的

练习 350 相互对照.

17.1.7 参见 17.9.1 中这一方法的另一个应用.

17.2 度量性质：初等的阐述

17.2.1 单焦性质

17.2.1.1 命题. 在 X 上圆锥曲线的非空的、不是圆的象集与 X 的子集 $\{m\in X;\ fm=e\cdot d(m,D)\}$ 之间有一个恒同关系，其中 D 是 X 上一条直线，f 是 X 上一点，$f\notin D$，$e\in \mathbf{R}_+^*$.

这个命题可通过下面的计算得出，其中 $x=h$ 表示 D 的方程，$(c,0)$ 是 f 的坐标．这时，命题中的子集由

$$(x-c)^2+y^2=e^2(x-h)^2$$

所定义；为使它跟 17.1.2 的方程一致，当 $e\neq 1$ 时取 $h=\dfrac{c}{e^2}$，从而得出

17.2.1.2 $$\frac{x^2}{\dfrac{c^2}{e^2}}+\frac{y^2}{(1-e^2)\dfrac{c^2}{e^2}}-1=0;$$

当 $e=1$ 时取 $h=-c$，从而得出

17.2.1.3 $y^2=-4cx$.

反过来，17.1.2 中的方程，在抛物线的情形令 $p=-2c$，$e=1$ 就写成了 17.2.1.3 的形式，在另两种情形可写成 17.2.1.2 的形式：

对椭圆 $(a>b)$ 有 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，$e=c/a$，$h=c/e^2$，

对双曲线有 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，$e=c/a$，$h=c/e^2$.

17.2.1.4 常数 e 称为 C 的离心率；椭圆(相应地：抛物线，双曲线)的特征是 $e<1$（相应地：$=1$，>1）．这样的一点 f 称为 C 的一个焦点，D 称为相应的准线．上面的讨论表明，除了 C 是抛物线的情形(这时它只有一个焦点，位于轴上)，C 有两个焦点，位于 x 轴(在椭圆的情形称为长轴，在双曲线的情形称为横轴，或在两种情形统称为焦轴)上.

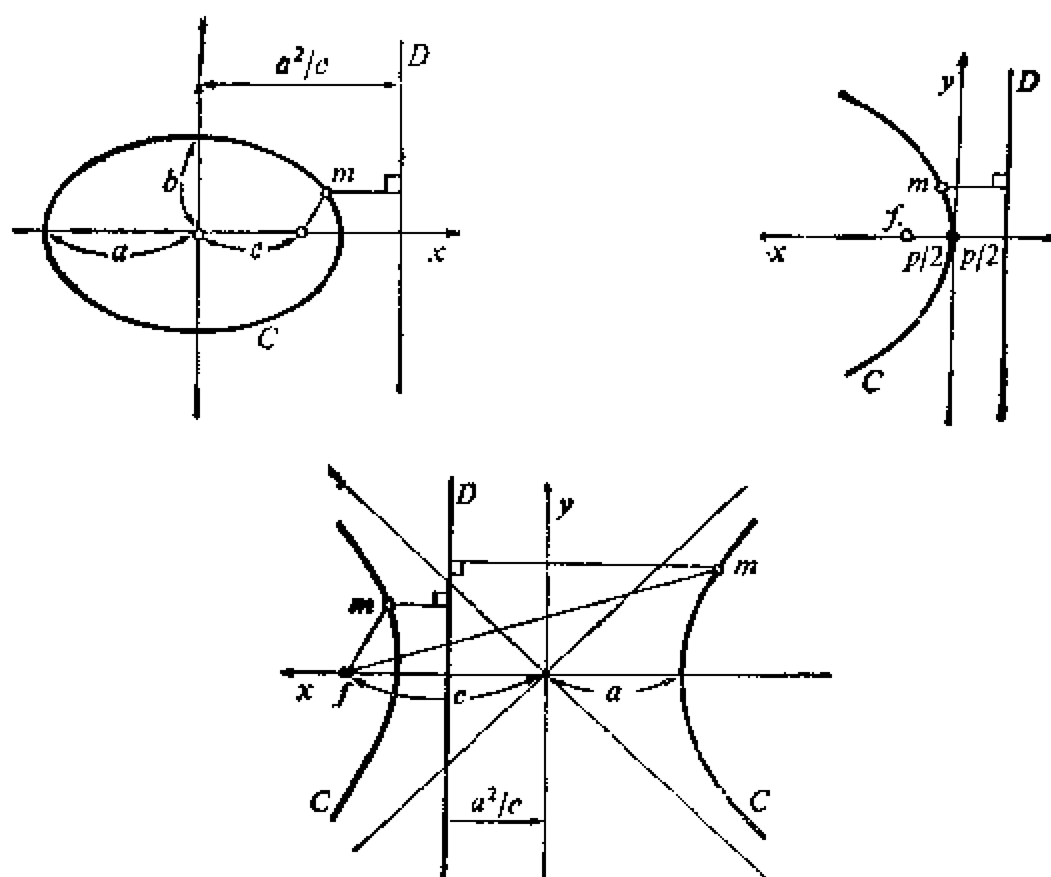


图 17.2.1.4.

17.2.1.5 相应的凸区域(参见 17.1.4) 为 $\{m : mf \leqslant e \cdot d(m, D)\}$.

17.2.1.6 设 $m, n \in C$, $p = D \cap mn$ (必要时可在 $\tilde{X}$ 中讨论); 则 pf 是 $\{fm, fn\}$ 的平分线(参见 8.7.7.4). 事实上,由于 $\frac{pm}{pn} = \frac{d(m, D)}{d(n, D)} = \frac{fm}{fn}$,这一点可从 10.3.8 推出.取极限情形即知 C 在 m 处的切线与 D 交于 p 且使 $\overline{fm, fp} = \pi/2$. 这首先就给出了 C 在 m 处的切线的一种作法;其次它还说明了若 S 是一条过 f 的直线,则它的过 f 的共轭直线 S' (参见 15.5.1) 使 $S \perp S'$. 这一性质表明了焦点的特征(参见 17.4.3). 例如由它可推出所谓 Poncelet “小定理”: 设 ma, mb 与 C 在 a 和 b 处相切,则对 C 的任一焦点, 直线 fm 是 fa 和 fb 的平方线. 其实, 置 $p = ab \cap D$, 则由配极变换可知极线 $p^\perp$ 经过 m 和 f, 因而 $[fa, fb, fp, fm] = -1$, 于是从 8.7.7.5 即可推得结论. 也可参见 17.6.3.6.

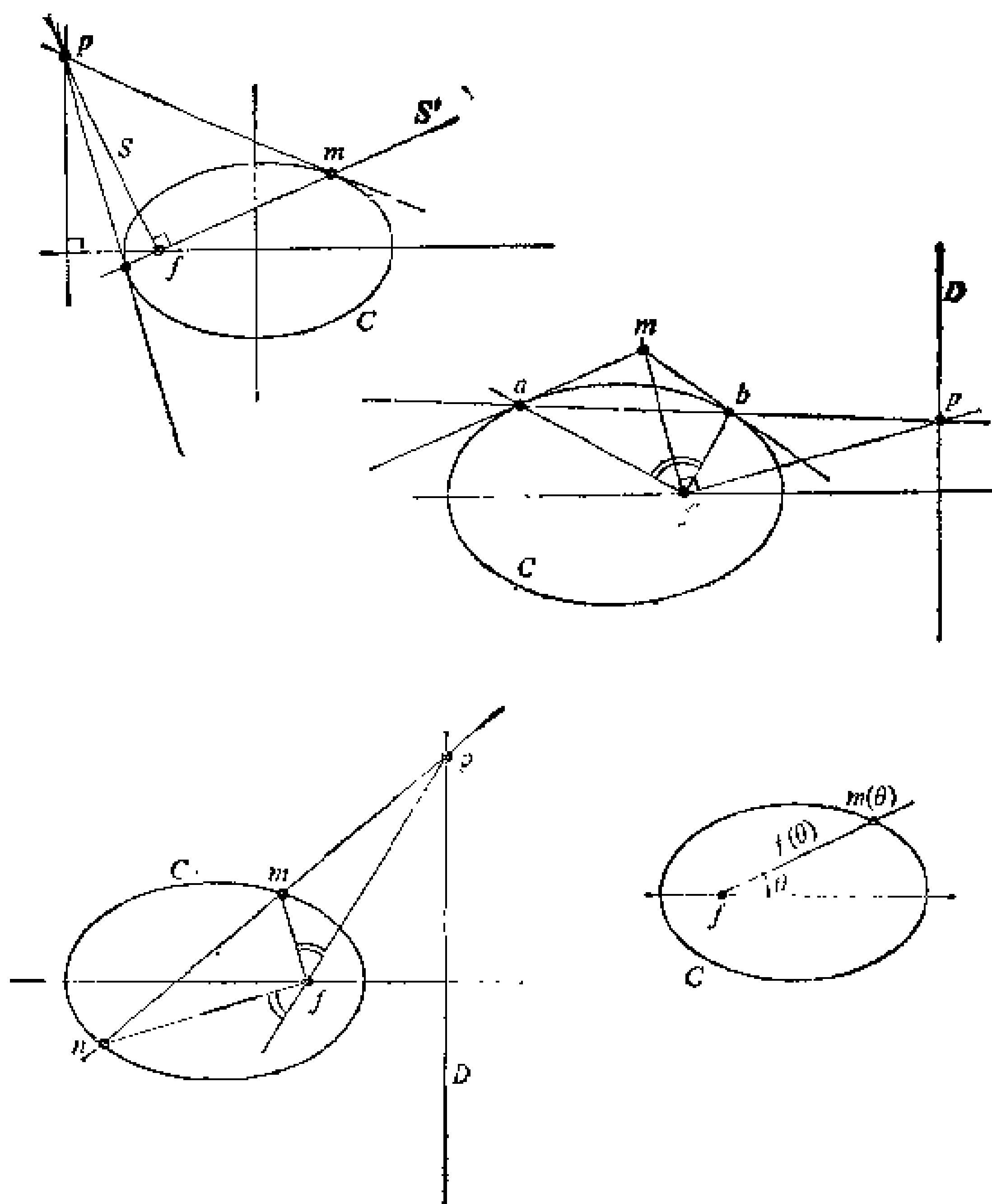


图 17.2.1.6.

17.2.1.7 行星的运行. 根据万有引力定律和 Binet 公式,行星画出的轨道在极坐标系 $\rho=f(\theta)$ 下满足下面的方程

$$f^{-1}+\frac{d^2(f^{-1})}{d\theta^2}=\text{常数},$$

例如可参见 [BE], 第 54 页. 于是有 $f^{-1}=\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta+\gamma$, 或改换极轴后得到: $f(\theta)=\dfrac{1}{\alpha\cos\theta+\gamma}$; 回到仿射坐标就是:

$x^2+y^2=k(x+h)^2$，这是以坐标系的极点为焦点的圆锥曲线的方程．这就是为什么行星、彗星、小行星…在首次近似的意义下都圆出以太阳为一个焦点的圆锥曲线的轨道．

17.2.2 双焦性质

17.2.2.1 设 f, f' 和 D, D' 是一条不是抛物线或圆的圆锥曲线 C 的两个焦点和相应的两条准线．根据 17.1.4，对任一 $m\in C$ 有：若 C 是椭圆，则 $d(m, D)+d(m, D')=d(D, D')$，若 C 是双曲线，则 $|d(m, D)-d(m, D')|=d(D, D')$．由此，据 17.2.1.1 就有：$mf+mf'=2a$（相应地，$|mf-mf'|=2a$）$\forall m\in C$．这就使下述命题得以成立：

17.2.2.2 命题． 在 X 中正常圆锥曲线的非空、不是抛物线的象集全体与 X 的形如 $\{m\in X: mf+mf'=2a\}$（相应地，$\{m\in X: |mf-mf'|=2a\}$）的子集之间，在 f, f' 取遍 X 中点对而 $2a>ff'$（相应地，$2a<ff'$）时存在一个恒同关系．

特别要注意的是，我们并未完全证明第一个集合含于第二个集合，而且上述计算并不是非常显然的．圆的情形对应于 $f=f'$，是毋庸多议的．我们来对椭圆进行证明，双曲线的情形留给读者．

取轴使 $f=(c, 0), f'=(-c, 0)$；对 $m=(x, y)$，就有 $(mf)^2+(mf')^2=2(x^2+y^2+c^2)$，$(mf')^2-(mf)^2=4cx$（这两个式子也可从 9.7.6 推得）．置 $mf+mf'=2\alpha>0$，就有 $mf'-mf=2cx/\alpha$，从而 $mf'=\alpha+cx/\alpha$，$mf=\alpha-cx/\alpha$．由此总有

$$\left(\alpha+\frac{cx}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha-\frac{cx}{\alpha}\right)^2=2(x^2+y^2+c^2),$$

即

$$(\alpha^2-c^2)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}-1\right)+y^2=0;$$

若 $\alpha=a$，得出的正是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2-1=0$，这里 $b^2=a^2-c^2$．反过来，从 $(a^2-c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)+y^2=0$ 推得

$$(c^2x^2-a^2\alpha^2)(a^2-\alpha^2)=0,$$

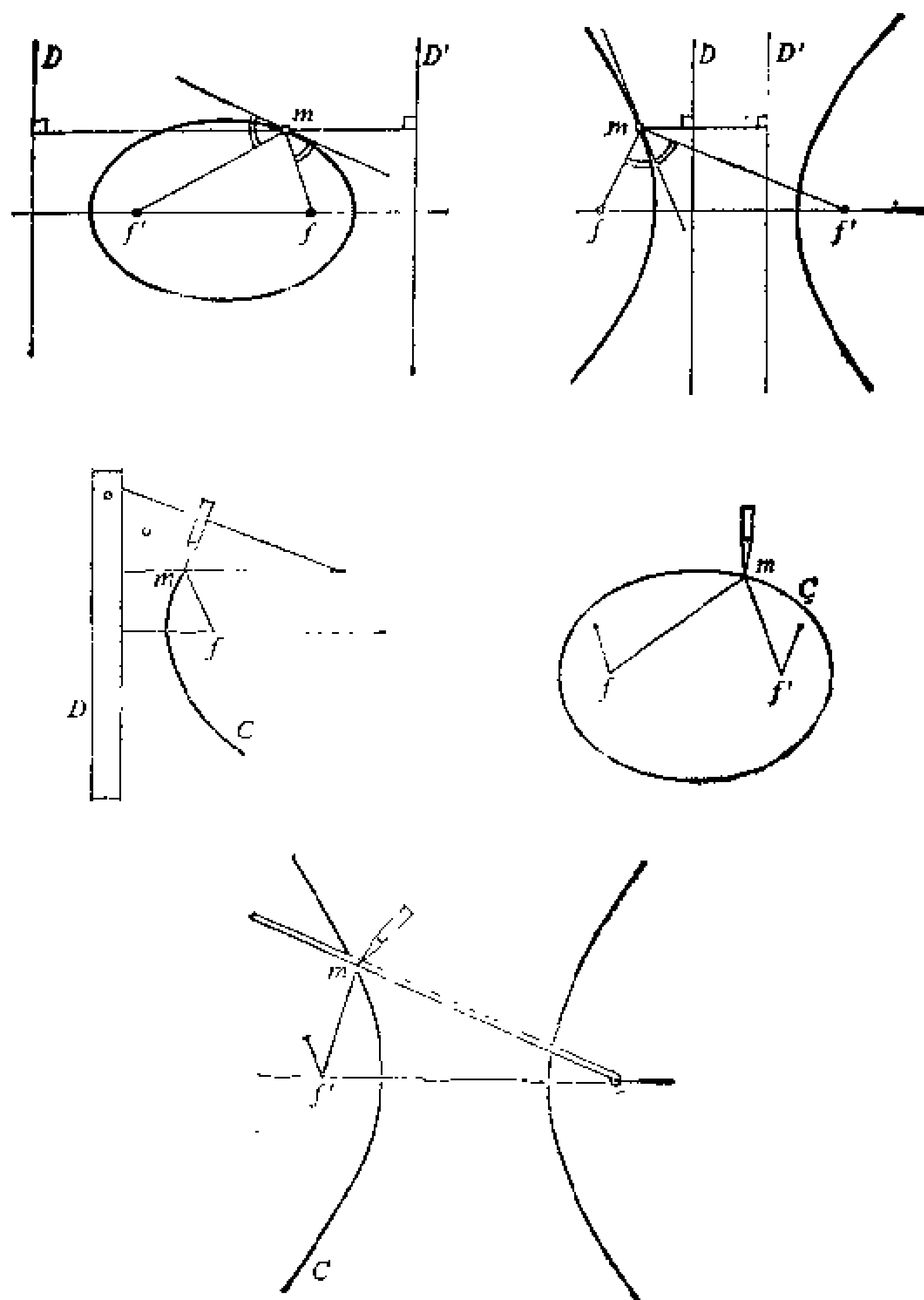


图 17.2.2.2.

因为 $a \neq \alpha$ 的情况是排除在外的，否则会得出 $x = a\alpha/c$，从而得出矛盾：

$$mf' - mf = 2a > ff'.$$

17.2.2.3 对应的凸区域（参见 17.1.4）分别对应于椭圆情形下的 $\{m; mf + mf' \leqslant 2a\}$ 和另两个区域 $\{m; mf' - mf \geqslant 2a\}$,

$\{m: mf - mf' \geqslant 2a\}$.

17.2.2.4　切线. 由 9.10 和 17.1.4 可知，C 在 m 处的切线，在双曲线的情形是 $\overrightarrow{mf}$，$\overrightarrow{mf'}$ 的内平分线，在椭圆的情形下是外平分线. 反过来，9.10 表明其切线具有以上性质的任何曲线，其象集必是一条以 f，f' 为焦点的圆锥曲线的象集；这又一次说明 17.2.2.2 是合理的. 也可参见 17.6.3.5.

17.2.2.5　用细线作图. 图 17.2.2.5 表明怎样用细线画出一个椭圆(花匠的椭圆)或一条双曲线；参见 17.7.1 中椭圆的另一种机械作图法. 对于三维空间中的二次曲面，在图 17.2.2.5 中可以看到一种用细线作图的方法，详见 [H-C] 的第 26 页或 15.7.16. 也可参见 17.6.4 中给出的参考书.

图 17.2.2.5.

17.2.2.6　焦点的极线. 由 17.2.2.4 和 17.2.2.2，再考虑到 $m' = \sigma_T m$ 与 f 关于 C 在 m 处切线 T 的对称性，我们知道 C 关于 f 的极线 (参见 9.6.8) 是与圆锥曲线 C 同心且与 C 双切于焦轴上的点的圆(称为主圆)；以上假定了 C 不是抛物线. 在抛物线的情形，利用 17.2.1.1 和 17.2.1.6 可证得 C 在 m 处的切线 T 是 mf 和过 m 平行于轴的直线的平分线；极线是与 C 切于顶点的直线.

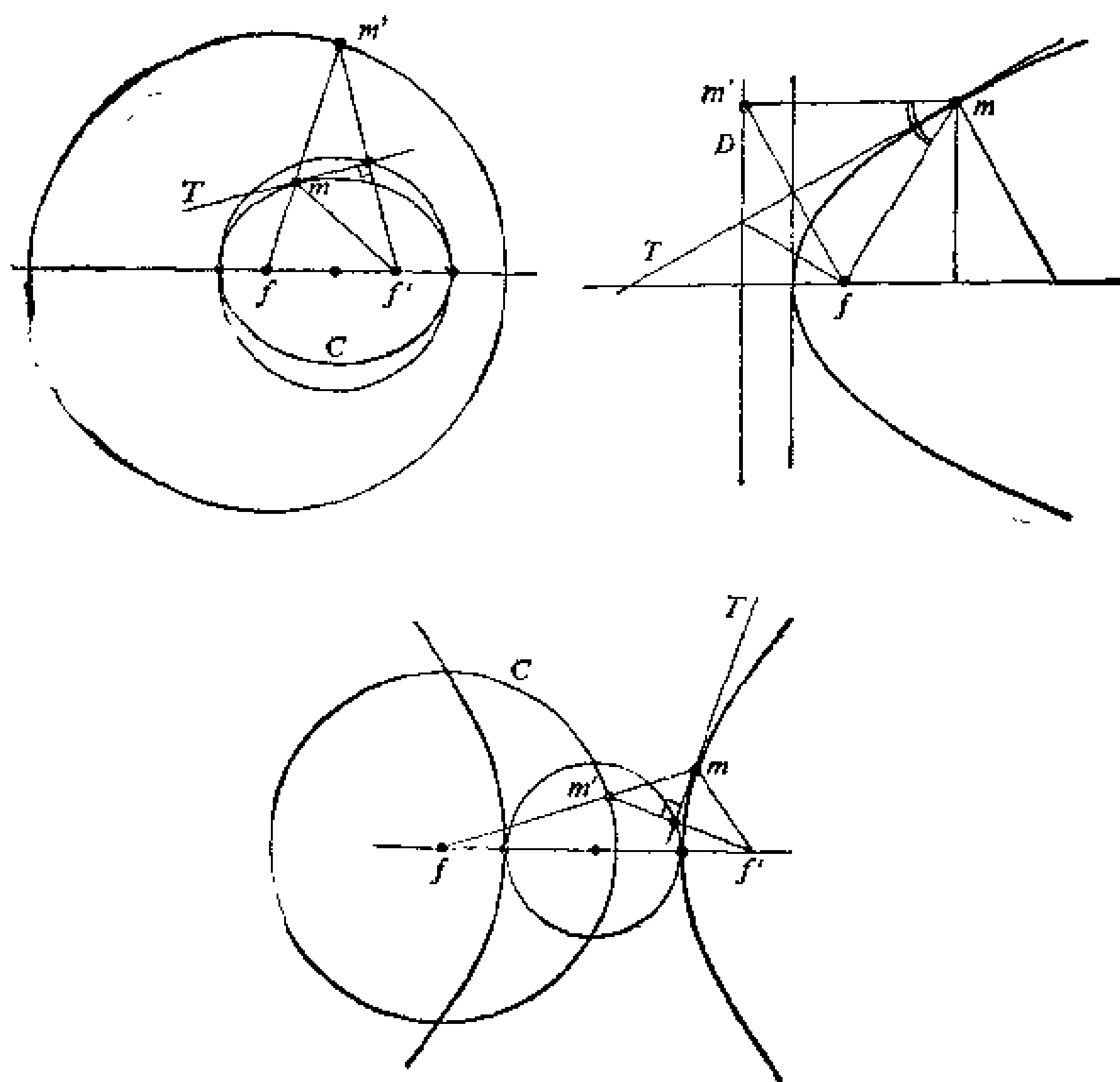


图 17.2.2.6.

17.3 度量性质：比利时人的陈述

很自然地，我们会想来证明，Apollonius 作为旋转圆锥面的截线所定义的圆锥曲线跟由单焦或双焦性质定义的圆锥曲线是可以等同起来的，其中后一种定义的方法是很初等的(我们是在略去所有的代数运算的意义上说的)。 这正是比利时人 Dandelin 和 Quételet 根据下列图形所做的工作。

17.3.1 图 17.3.1 相应于双焦性质，图 17.3.2 相应于单焦性质．证明图 17.3.2 的关键的想法是：(i) 从同一点向一个球面所作的两

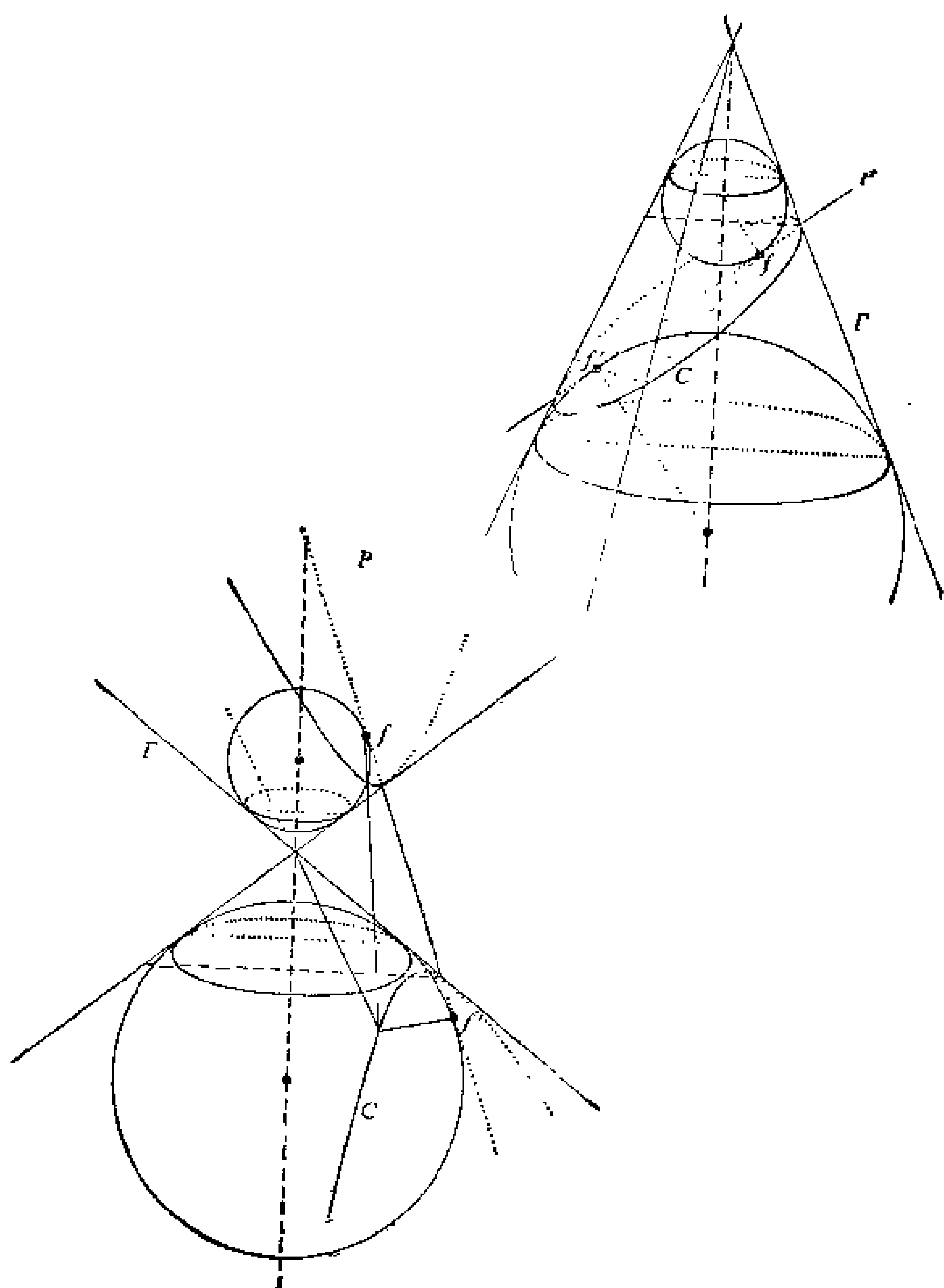


图 17.3.1.

个切线段长度相等；(ii) 至少存在一个球面 Σ 内接于给定的那个圆锥面 Γ 且与截面 P 相切；(iii)若记含有 Σ 与 Γ 的切圆的平面为 Q，则圆锥面的点以 $\frac{d(m, Q)}{d(m, \Sigma)}$ = 某个常数为特征；(iv) 若

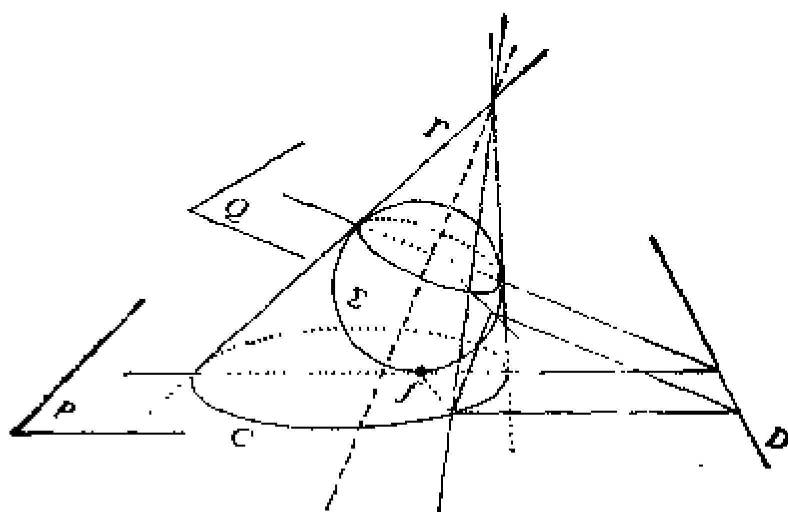


图 17.3.2.

$D = P \cap Q$，则 P 的点满足 $\frac{d(m, Q)}{d(m, D)}$ = 常数．我们应注意 (iii) 的特征，否则我们就仅仅知道 $C = P \cap \Gamma$ 含于一条以 D 为对应于焦点 f (即 Σ 与 P 的切点)的准线的圆锥曲线之内．读者在做练习时会推出所有这些结论，包括双焦的情形在内，或者可参见 [D-C1]，第 VIII 章．在那里也会再次遇到切线的性质 17.2.1.6 和 17.2.2.4；也可参见 17.6.3.4．

17.4 度量性质：Plücker 的射影说法

17.4.1 从 8.8.7 和 9.5.5.2，我们知道可以用射影的方式来解释 X 的欧氏性质；但为此就须引进 X 的射影完备化空间 $\tilde{X}$，以及 $\tilde{X}$ 的复化空间 $\tilde{X}^C$．最后，就有 X 的循环点 I, J．

根据 7.3，7.6，16.7 和 16.1.4，对任何一条有非空象集的正常圆锥曲线 α (或者说对任何一条这样的圆锥曲线的象集 C)，对应着唯一的一条 $\tilde{X}^C$ 中的射影圆锥曲线，记为 $\bar{\alpha}$，以及 $\tilde{X}^C$ 的一个子集，记为 $\bar{C}$，即 $\bar{\alpha}$ 的象集．我们将在 $\tilde{X}^C$ 中系统地进行讨论，从而进一步研究欧氏圆锥曲线；虽然这样做似乎显得不太自然，而且不管怎么说似乎代价太大，但是我们会从中发现两个优点，正如在数学上把讨论范围拓广时常会遇到的情形一样：第一，对圆和圆锥

曲线的性质可作出深刻而统一的解释．第二，可以得出一些新的结论，其中有些是很难用初等的方法证明的．

17.4.2 作为圆锥曲线的圆

17.4.2.1 准则． 设 C 是一条正常圆锥曲线的非空象集；则 C 是圆的充要条件是 $I, J \in \tilde{C}$（其实只要 $I \in \tilde{C}$ 就够了，因为对 $\tilde{X}^C$ 的对合 σ（参见 7.5.1，8.8.6.1），有 $\sigma(\tilde{C}) = \tilde{C}$，$\sigma(I) = J$）．更一般地，对 X 的圆锥曲线 α（不必正常或象集非空），$I \in \overline{\mathrm{im}(\alpha)}$ 等价于 α 的任一方程 q 能使 $\vec{q} = k\|\cdot\|^2$，其中用到的是 $\vec{X}$ 的欧氏范数．这就是广义圆，我们在 20.1 中还会碰到．

17.4.2.2 可容已知角的弧． 上述讨论首先解释了 10.9.4，也即：若 a, b 是圆 C 的两点，则两条直线的有向角 $\widehat{xa, xb}$ 对 $x \in C$ 来说是常数，反之亦然．事实上，在 $\tilde{X}^C$ 中的 $\tilde{C}$ 上，交比 $[xa, xb, xI, xJ]$ 是常数，从而根据 Laguerre 公式 8.8.7.4 即可得证．至于 $2\widehat{xa, xb} = \widehat{\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega b}}$，其中 ω 是 C 的中心，可由 16.8.6 推出．

17.4.2.3 应用：切距圆． 我们来讨论向圆锥曲线 C 所引的两条切线 ma, mb 相互正交的点 m 的集合．由 8.8.7.4 可知这等价于在 $\tilde{X}^C$ 中有

$$[ma, mb, mI, mJ] = -1;$$

根据 14.5.2.6 这又等价于 $mI \perp mJ$（在 $\tilde{X}^C$ 中对 $\tilde{C}$ 而言）．再根据 16.2.7.1 这就等价于 m 属于 $\tilde{X}^C$ 中某一条过 I 和 J 的圆锥曲线 $\tilde{S}$．这条圆锥曲线正常的充要条件是 IJ 不自共轭，也就是说 C 不是一条抛物线．回到 X 中，我们得到 m 应属于广义圆 $\tilde{S} \cap X$，或当 C 是抛物线时它属于一条直线．得到的并不一定是整个圆，因为从 m 向 C 作的两条切线可能并不存在．完整的讨论是容易的；对椭圆，得到的是整个圆，半径为 $a^2 + b^2$，对抛物线，得到整条准线．对双曲线，当渐近线成钝角时得到空集，对等角双曲线得到一个点（中心），当渐近线成锐角时得到少去四点的一个圆．读者可以用初等的方法证明上述结论，例如可借助于 14.5.3 或完全几何地进行证明．

注意，对于退化为两个不同的点 a，b 的切圆锥曲线（参见 14.6.3.2），切距圆就是以 ab 为直径的圆.

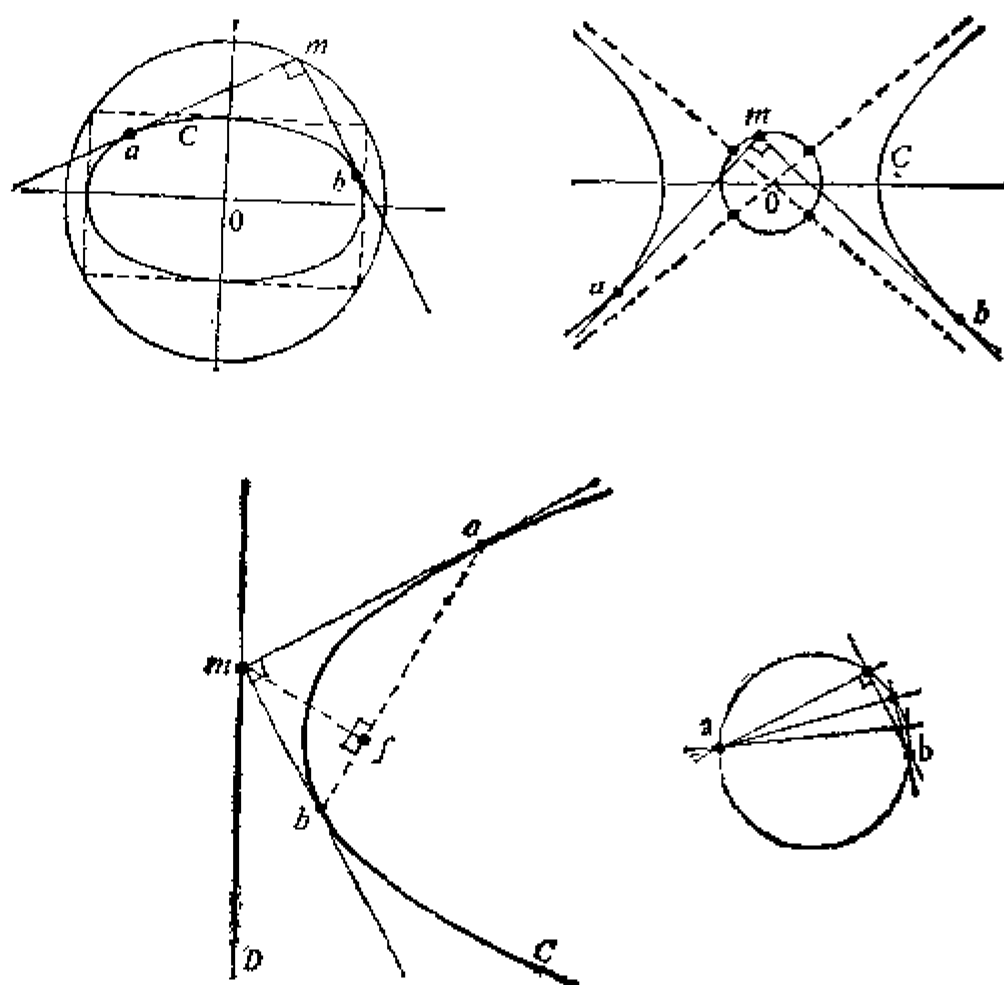


图 17.4.2.

17.4.3 圆锥曲线的焦点与循环点

17.4.3.1 我们在 17.2.1.6 中已经注意到，过 C 的一个焦点且关于 C 共轭的直线的对合是正交直线的对合；这对直线一方面根据与 14.5.2.6 对偶的结论是从 f 向 C 引的两条切线，另一方面根据 Laguerre 公式又是 fI 和 fJ（在 $\tilde{X}^C$ 中），因此实际上 fI，fJ 是与 C 相切的.

17.4.3.2 反过来，我们不管上述的那些结论，把 X 的一条圆锥曲线 C 的焦点就定义为使直线 fI 和 fJ 与 $\bar{C}$ 相切的点 f. 由于 $\sigma(I)=J$ 和 $\sigma(\bar{C})=\bar{C}$（参见 17.4.2.1），有三种可能性：$\bar{C}\ni I$，J 而 f 是唯一的，就是中心，或者 C 是抛物线而 f 也唯一，或者有

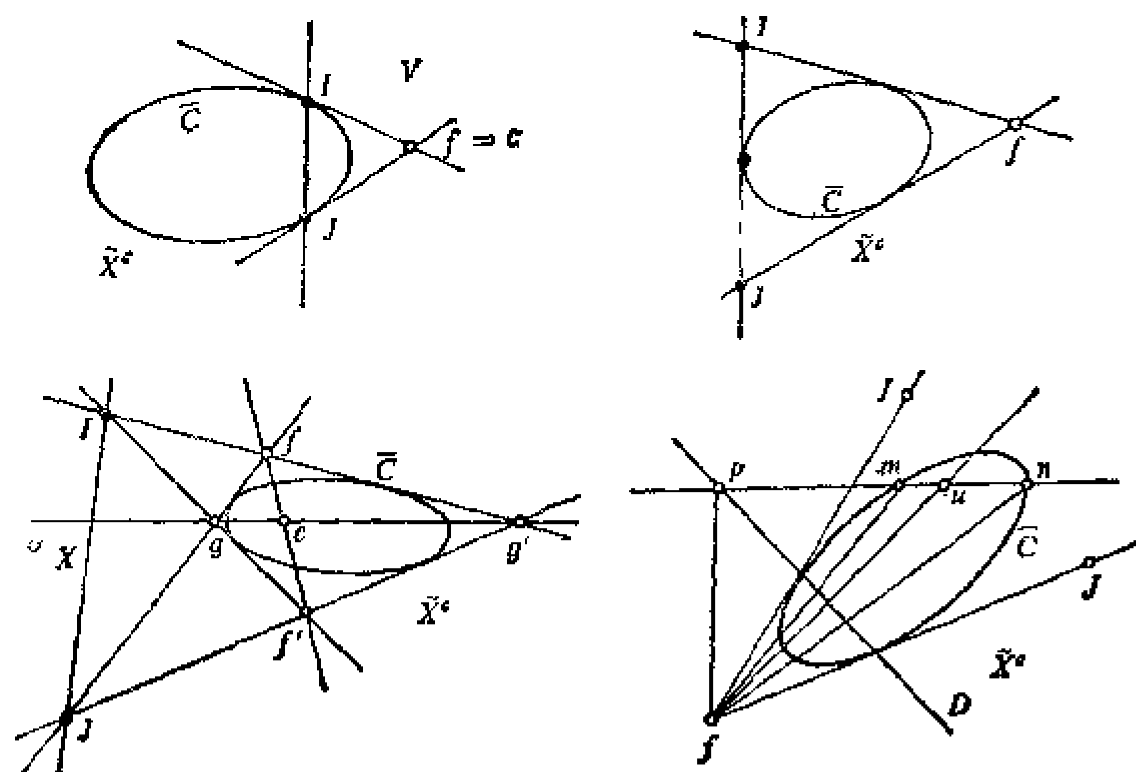


图 17.4.3.2.

四条从 I 和 J 向 $\overline{C}$ 引的切线，交于不同的四点；但这些切线的集合在对合 σ 下是稳定的，从而这些点中的两点，譬如说 f, f'，必满足 $\sigma(f)=f$，$\sigma(f')=f'$，因此 $f, f'\in X$，而另两点 g, g' 满足 $\sigma(g)=g'$，因此 $g, g'\notin X$ 但 $gg'\subset X$。 最后作配极变换即可表明，由于 $[I, J, ff'\cap IJ, gg'\cap IJ]=-1$，所以 ff', gg' 是正交的，而且 $ff'\cap gg'$ 是 ∞_X 的极点，因而就是 C 的中心．于是 ff', gg' 是 C 的两条轴，这样我们就跟 17.2.1.4 中一致了．

17.4.3.3 不过，剩下还得说明 C 对一个焦点 f 及其极线 $D=f^{\perp}$ 满足 17.2.1.1 的度量定义．若设 $m, n\in C$，$p=mn\cap D$（在 $\tilde{X}$ 中）；则因在 $\tilde{X}^C$ 中从 f 向 $\overline{C}$ 引的切线为 fI，fJ，由配极变换可知，若 u 是 p 关于 m 和 n 的调和共轭点，则 $[fI, fJ, fp, fu]=-1$．因此（参见 8.8.7），在 X 中直线 fp 与 fu 是正交的，且 fp 是 fm, fn 的平分线； 17.2.1.6 的讨论就表明了 $\dfrac{fm}{fn}=\dfrac{d(m, D)}{d(n, D)}$．由于 m, n 是任取的，证得结论．

17.4.3.4 双焦性质 17.2.2.2 将在 17.6.3.5 中解释.

17.4.3.5 应用：Simson 直线和抛物线. 要说明的结论是：若一个三角形 $\{a, b, c\}$ 的三边都与一条抛物线相切，则这条抛物线的焦点 f 在 $\{a, b, c\}$ 的外接圆上. 对 $\tilde{X}^C$ 中六点 a, b, c, f, I, J 应用 16.5.5.3, 17.4.2.1 和 17.4.3.2, 即可直接推出这个结论.

现在根据 17.2.2.6, f 在三边 ab, bc, ca 上的投影是过 C 的顶点的切线上的三点,因而是共线的. 反过来,如果这样三个点是共线的,我们就可以用焦点和顶点处的切线来决定一条抛物线. 因此,上述结论和前一段的内容表明了,一点在 $\{a, b, c\}$ 的各边上

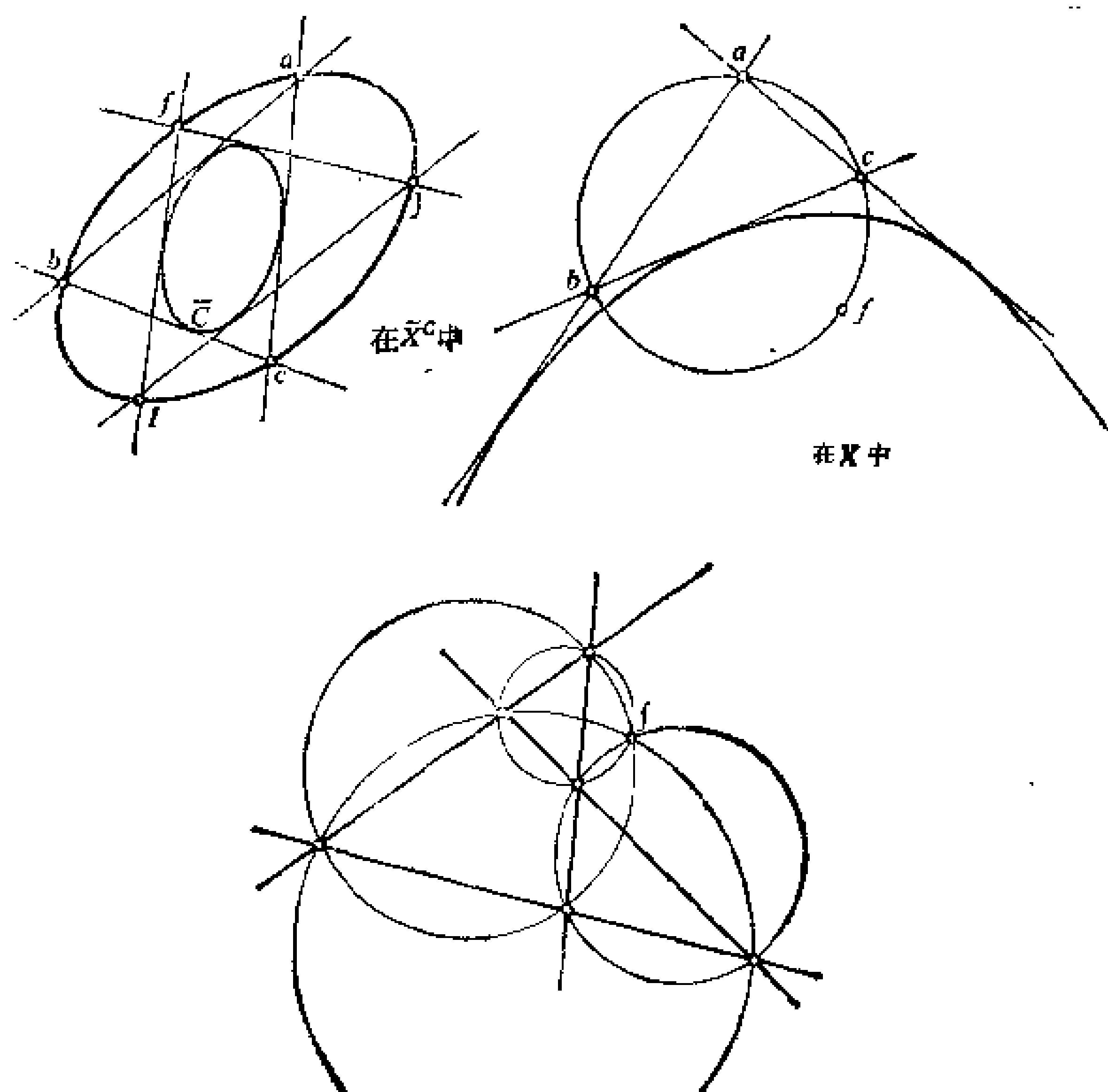


图 17.4.3.5.

的三个投影共线的充要条件是这三点在 $\{a, b, c\}$ 的外接圆上：这就是 10.4.5.4.

由此，根据 16.7.4 可得到一个推论：设平面上有四条直线；则其中每三条构成的三角形的外接圆是四圆共点的，交点是与这四条直线相切的抛物线的焦点.

17.4.3.6 焦点的实用找法. 见 17.9.24.

17.5 欧氏圆锥曲线束与循环点

17.5.1 我们把 $\tilde{X}$ 的非退化圆锥曲线束称为 X 的圆锥曲线束(参见 14.2.7.5). 我们要研究 X 的圆锥曲线的无穷远点，即束 $\mathscr{F}$ 在 ∞_X 上的迹；这里要用到 $\tilde{X}^C$ 的在 ∞_{X^C} 上的复化束 $\mathscr{F}^C$ (参见 16.5.2) 以便应用循环点. 下面的内容，当仅涉及 $\alpha \in \mathscr{F}$ 的无穷远点时，可以用初等的方法从斜率和 16.7.1 的写法推出，读者不妨试一下. 下面，一对正交直线也称为等轴双曲线.

17.5.2 假设 ∞_X 关于 $\mathscr{F}$ 是良好的(参见 16.5.4)，我们来看 $\mathscr{F}^C$ 在 ∞_{X^C} 上关于循环点 I, J 的对合 f 的情形：别忘记 $\sigma(I) = J$, $\sigma(J) = I$，还有，这些对合的偶关于 7.5 的对合 σ 来说应是稳定的(σ 不是 ∞_{X^C} 的对合！). 因此，只有三种可能情形：

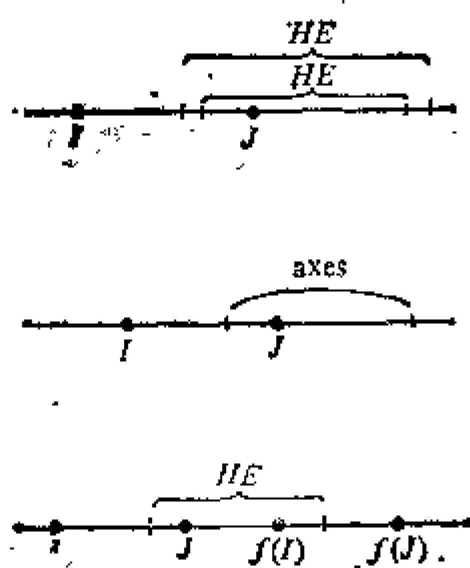


图 17.5.3.

情形 I: $f(I) = I, f(J) = J$;

情形 II: $f(I) = J$, $f(J) = I$;

情形 III: $\{f(I), f(J)\} \cap \{I, J\} = \phi$.

回忆一下 6.7.2, 8.8.7, 8.7.7.5, 17.4.2 和 17.1.3, 就可看到：

17.5.3 命题. 设 $\mathscr{F}$ 使 ∞_X 关于 $\mathscr{F}$ 是良好的. 一般，束 $\mathscr{F}$ 只含一条等轴双曲线(情形 III)；若含有两条，则它们就是束 $\mathscr{F}$ (情

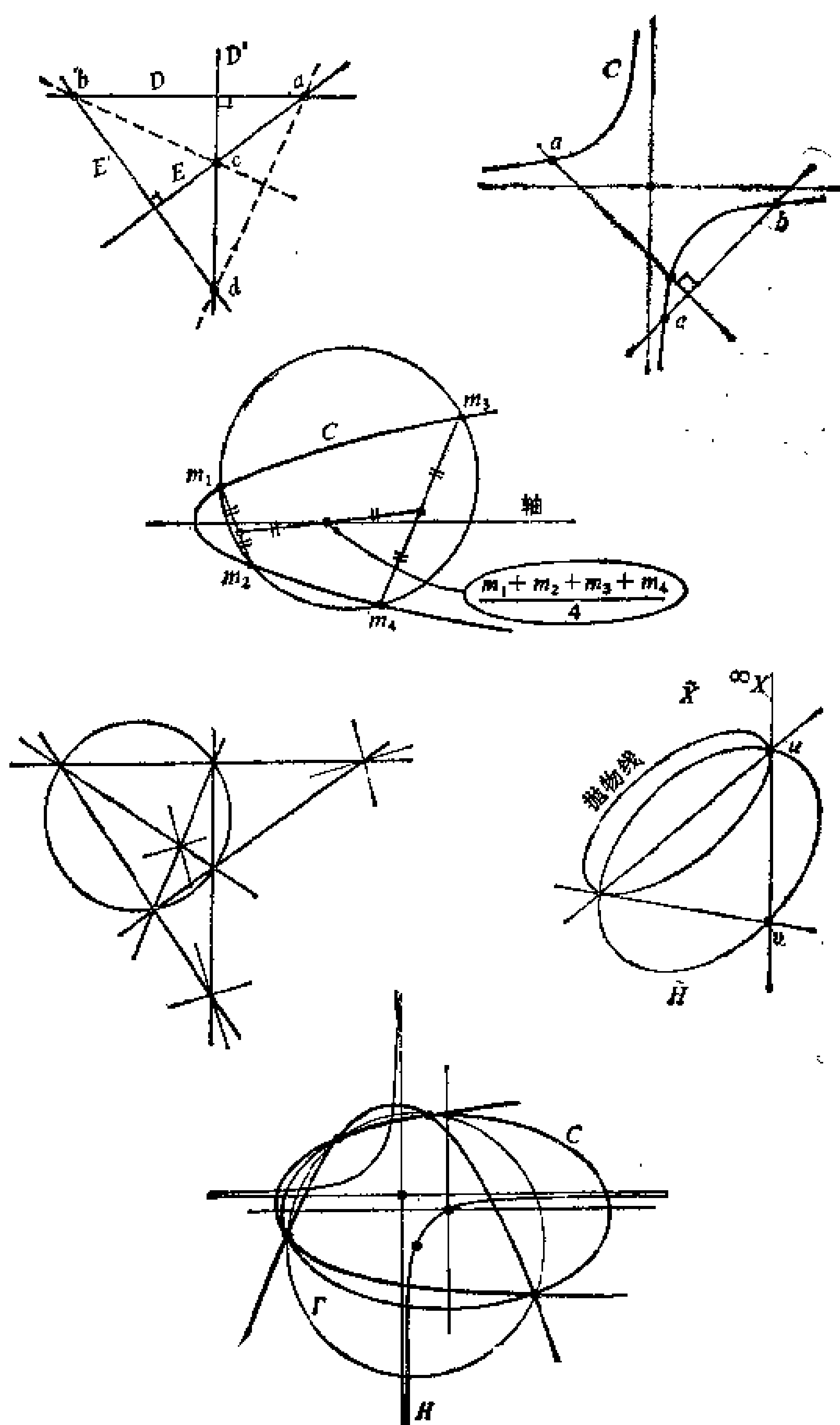

D'
b
D
a
c
E'
E
d
C
a
b
c
C
m_3
m_1
轴
m_2
m_4
$\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4}$
$\tilde{X}$
$^{\infty}X$
u
抛物线
v
$\tilde{H}$
C
Γ
H

图 17.5.4.

形 I)． $\mathscr{F}$ 含有一个广义圆的充要条件是 $\mathscr{F}$ 中两条圆锥曲线有相同的轴向(这时所有的圆锥曲线都有相同的轴向，情形 II)．

17.5.4　在情形 I 的应用． 设有四条直线 D, D', E, E', $D \perp D'$, $E \perp E'$ (在欧氏基下)；则它们定义一个圆锥曲线束，底的点为 $D \cap E = a$, $D \cap E' = b$, $D' \cap E = c$, $D' \cap E' = d$, 而其中所有的圆锥曲线都是等轴双曲线． 特别是，由 17.5.3 可知直线对 $\{ad, bc\}$ 是由两条正交直线构成的；我们这样就证明了三角形的三条高交于一点(参见 10.2.5)．

相似的论证表明，对等轴双曲线 C 上任意三点 $a, b, c \in C$, $\{a, b, c\}$ 的垂心也是 C 上一点．

如果对三角形 $\{a, b, c\}$ 及其垂心 d 应用 16.5.5.1，就正好得到九点圆的结果(参见 10.11.3)；这个圆是包含 a, b, c, d 的等轴双曲线的中心的轨迹． 由 16.7.5 可知这个圆的中心如 10.11.3 所示．

17.5.5　在情形 II 的应用

17.5.5.1　设 $\{D, D'\}$ 和 $\{E, E'\}$ 是两对直线；四点 $D \cap E$, $D \cap E'$, $D' \cap E$, $D' \cap E'$ 是共循环点的充要条件是 $\{D, D'\}$, $\{E, E'\}$ 有相同的平分线方向．这时，第三对直线也有相同的平分线方向．

17.5.5.2　设 $\mathscr{F}$ 是 X 的圆锥曲线束，∞_X 关于 $\mathscr{F}$ 是良好的，且包含一个圆；则 $\mathscr{F}$ 中圆锥曲线的中心的轨迹是一条等轴双曲线 H，其渐近线为 $\mathscr{F}$ 中两条抛物线的轴．

除了关于渐近线这一点外，它们都可由 16.5.5.1 推出；为此，将 ∞_X 上对应于公共轴向的两点记为 u, v。于是，根据 16.5.3.3 的构造可知，当 $m \in H$ 时，直线 um, vm 是关于 $\mathscr{F}$ 中以 m 为中心的圆锥曲线共轭的；当 m 在 v 上时，这就是说 H 在 u 的切线是与 ∞_X 在 u 相切的抛物线的轴．

17.5.5.3 X 的两条抛物线 C, C' 构成一个满束 $\mathscr{F}$ 时 (参见 16.5.1)，它们的轴相互垂直的充要条件是 $\mathscr{F}$ 含有一个圆；另外，这两条抛物线的轴经过重心

$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\omega_i m_i$, 这里 $C\square C'=\{(m_i,\omega_i)_{i=1,\cdots,k}\}$.

这可由 17.5.5.2 和 16.7.5 推出；由此立即可导出经过四个不同的上循环点的抛物线的构造.

重心的性质也可以用初等方法来证明，或者是根据 17.5.5.1

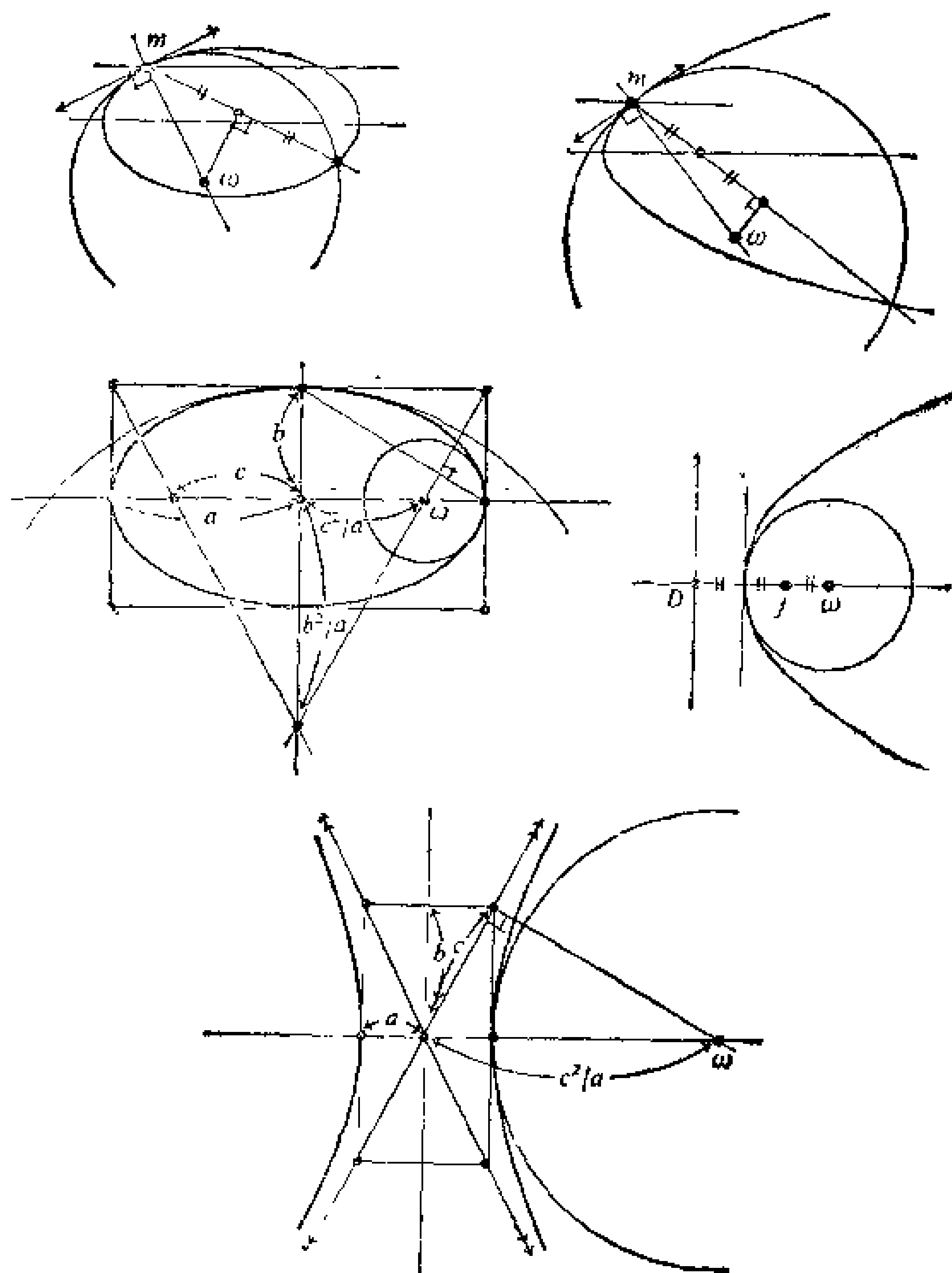


图 17.5.5.4.

对直径进行讨论,或者是在坐标系下讨论抛物线 $y^2 = 2px$，并利用一个四次方程的诸根之和公式.

17.5.5.4 密切圆. 设 C 是一条正常圆锥曲线的非空象集，$m \in C$，则唯一存在一个圆，记为 $\Gamma_m C$，在 16.4.5 的意义下与 C 密切于 m 处. 它也是微分几何意义下的密切圆（参见 [B-G]，8.4.15）. 称之为 C 在 m 处的密切圆. 若 m 不是顶点，$\Gamma_m C$ 的特征是：与 C 相切于 m 而且经过另一点 m'，而且过 m 点、与 C 在 m 处的切线 $T_m C$ 所夹角的平分线平行于轴的直线 D,就在 m' 处与 C 相交；或者是：与 C 在 m 处相切而且在 m 的邻域里局部地穿过 C. 若 m 是一个顶点，则 $\Gamma_m C$ 自然地与 C 在 m 处超切且 $C \cap \Gamma_m C = \{m\}$.

这可由 17.5.3 和 16.4.10 推出,说明超切时要用到对称性，说明穿过时要用到连续性.

当 m 不是顶点时，上述特征已可从几何上确定圆 $\Gamma_m C$；在抛物线的情形下，17.5.5.3 表明轴上有一点 $\frac{3m + m'}{4}$，这样甚至不用求出 m' 就可立即作出 $\Gamma_m C$. 但在 m 是顶点的情形,必须利用 16.4.7.3 的准则,说明

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 + k(x - a)^2$$

是一个圆的方程,由它可得出与 C 在 $(a, 0)$ 超切的圆；这样我们就得到了图中作出的那些圆. 在 17.7.4 中还会给出 C 上一点处曲率中心 ω 的另一种作法.

17.5.5.5 一个力学的例子. 考虑在一个固定的竖直平面上运动的挂在软绳上的单摆，或者某圆内部的一个运动质点——两种情形的结论是一样的;我们在圆的最低点将该质点抛出，问：应用多大的初速度抛出,才能使它在到达最高点之前脱离圆周,而且自由下落的轨线正好通过出发点.

解决这个问题，要注意到自由下落的轨线是轴线竖直的抛物线，而且在质点脱离圆周的那一点处，这条抛物线与圆是密切

的，这是因为速度和加速度都应该是相等的．而 17.5.5.4 表明抛物线与圆的另一个交点是容易找出的．详细地说是这样：设 ω 是圆 Γ 的中心，a 是最低点，m 是脱离点，m' 是在 m 与 Γ 密切且轴竖直的这条抛物线与 Γ 的另一交点．由 17.5.5.4 和 8.7.2.4 推得 $\widehat{\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega m'}} = -3\widehat{\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega m}}$．轨线经过 a 的条件就是 $m' = a$，即 $3(\widehat{\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega m}}) = 0$，由此即得 $\widehat{\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega m}} = 0$ 或 $2\pi/3$ 或 $4\pi/3$．

参见 17.9.2 中其它相仿的问题．

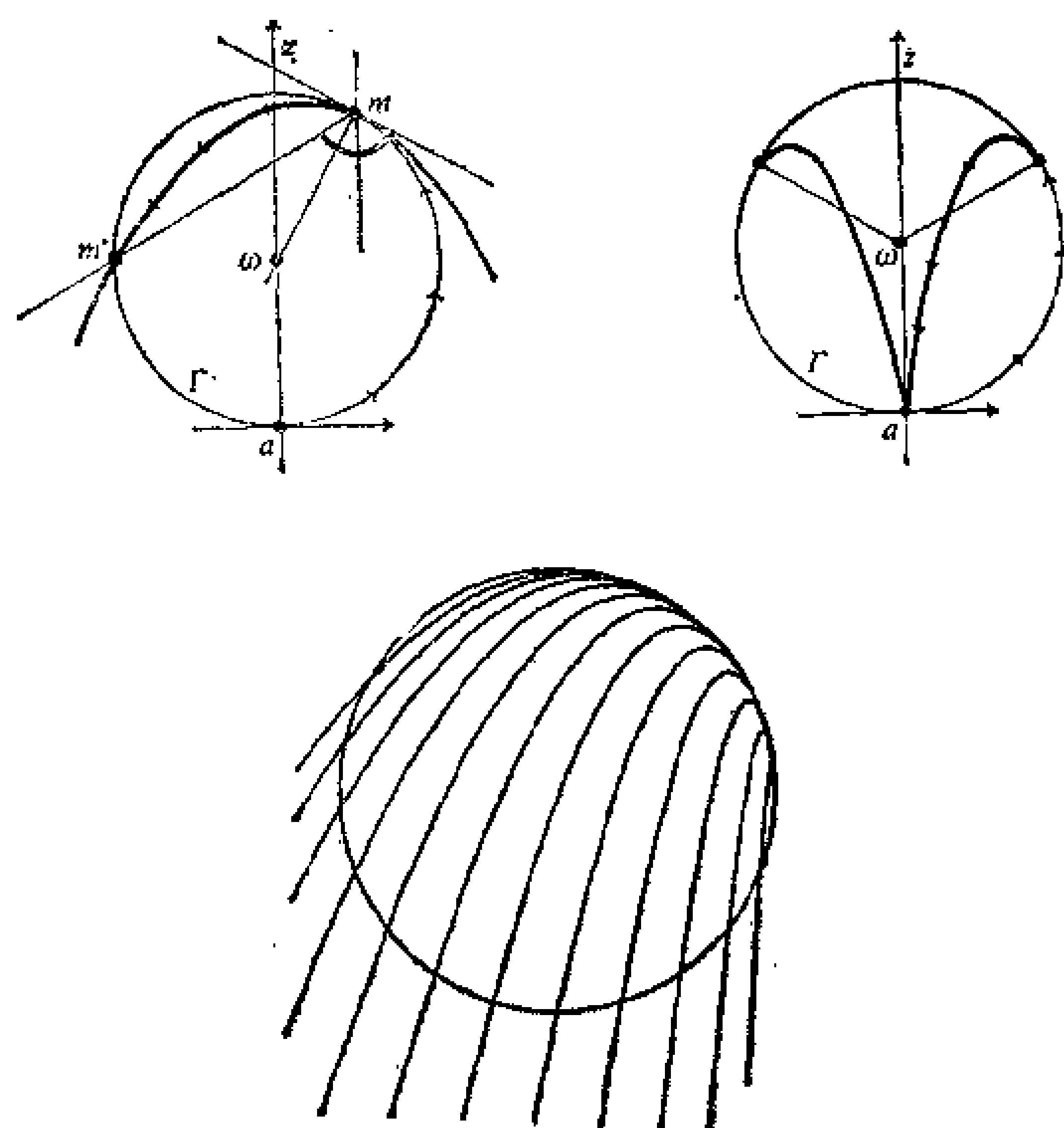


图 17.5.5.5.

17.5.5.6 由一点向圆锥曲线作的法线，Apollonius 双曲线． 设 C 是一条非空正常曲线，$a \in X$，则存在一至四条经过

a 的 C 的法线．这些法线的垂足就是 $C \cap A_a C$ 的点，这里 $A_a C$ 是由 a 和 C 确定的一条等轴双曲线，称为 C 相对于 a 的 Apollonius 双曲线． 双曲线 $A_a C$ 是由下列性质几何地确定的：其渐近线平行于 C 的轴，它在 C 不是抛物线时含有 C 的中心 a（在抛物线的情形，它的一条渐近线是 C 的轴），它的中心是 $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} \omega_i m_i$，其中取了 Γ 是任一与 C 交于 $C \square \Gamma = \{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$ 的以 a 为中心的圆，最后它包含 a 关于 C 的极线 $a^{\perp}$ 上的两点 u，v 并使 au，av 正交（因而，若 a 在 C 的外部，则直线 au，av 是由 a 向 C 作的切线的平分线）．

首先我们注意到，由 C 和一个以 a 为中心的广义圆 Γ 所定义的束 $\mathscr{F}$ 中的圆锥曲线的中心的轨迹只与 a 和 C 有关；事实上 16.5.3.3 表明，m 是 $\mathscr{F}$ 中一条圆锥曲线的中心的充要条件是它关于 C 和 Γ 的极线平行． 但一点 m 关于以 a 为中心的圆 Γ 的极线，其方向是跟 am 正交的，而 am 的方向是与 Γ 无关而仅与 a 有

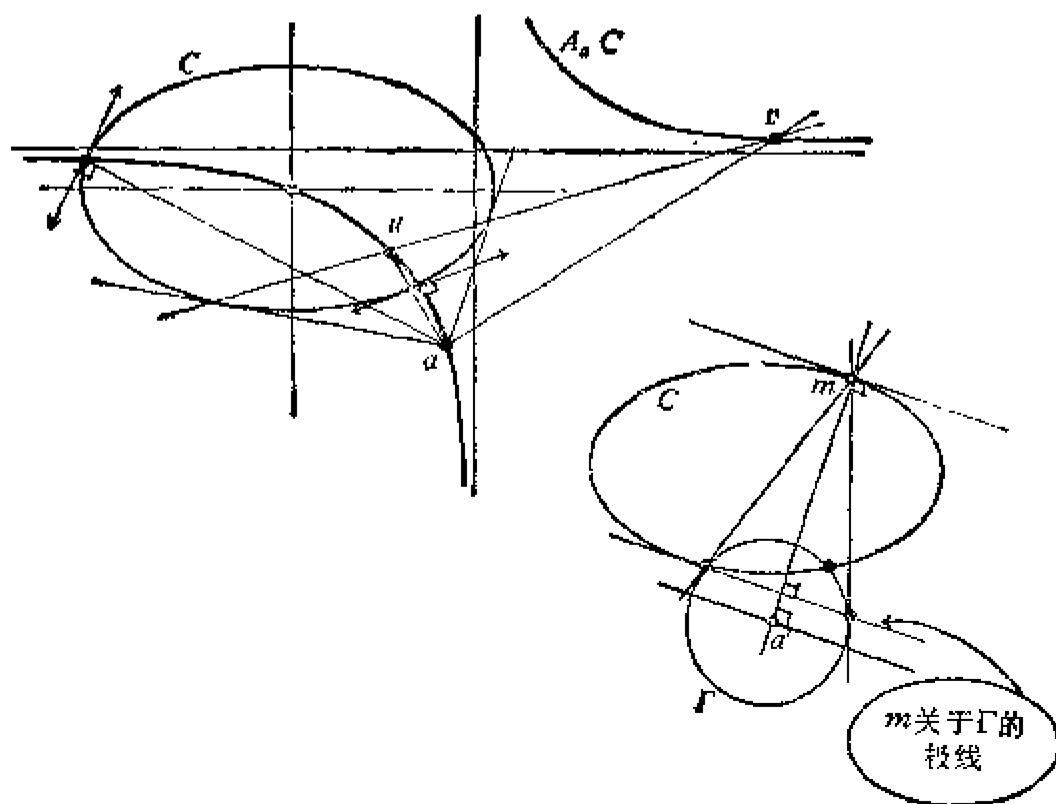


图 17.5.5.6.

关的。

现在我们对以 a 为中心的任一圆锥曲线 Γ，例如象集化为 a，方程为 $d^2(\cdot, a)=0$ 的退化圆锥曲线，来应用17.5.5.2和17.5.5.3作出一条双曲线 A_aC，即 $\mathscr{F}$ 中圆锥曲线的中心的轨迹；剩下要说明的是对一点 $m\in C$，直线 am 垂直于 C 在 m 的切线 T_mC 的充要条件是 $m\in A_aC$。为此，只要用到前一段的结论就可以了：C 在 m 处的切线是 m 关于 C 的极线，它平行于 m 关于 Γ 的极线的充要条件是在欧氏空间意义下 $am\perp T_mC$！

建议读者就各种不同的 a, C 作出 Apollonius 双曲线；也可参见17.9，18.2．注意一个很有趣的结论：一个中心固定的变圆与一条固定圆锥曲线 C 交于四个不同的点时，这四点的重心是不变的．关于法线条数与 a 的位置的关系，我们还没进行讨论；那是17.7.4的内容．

17.6 圆锥曲线的切束，共焦圆锥曲线

我们要系统地应用16.5.6.3，现在其中的 $\mathscr{F}^*$ 是一个 X 的切束，根据定义也就是一个 $\tilde{X}$ 的切束．我们也引进 $\mathscr{F}^{*C}$，即切束 $\mathscr{F}^*$ 在 $\tilde{X}^C$ 中的复化束，以便利用X的循环点 I, J。

17.6.1 切束的切距圆。 设 $\mathscr{F}^*$ 是一个切束，我们将它复化为 $\mathscr{F}^{*C}$；设两条圆锥曲线 $\alpha^*, \beta^*\in\mathscr{F}^*$ 的切距圆为 Γ, Σ，则 Γ, Σ 是 $\tilde{X}^C$ 中两条圆锥曲线；设 $m\in\Gamma\cap\Sigma$；从 m 向 $\mathscr{F}^{*C}$ 中圆锥曲线作的切线构成 m^* 的一个对合(参见16.5.6.3)，它与 Γ, Σ 相应的两条直线是关于 $\{mI, mJ\}$ 调和共轭的．因此 $\mathscr{F}^*$ 中圆锥曲线的切距圆 Θ 是使 $m\in\Theta$ 的；Θ 全体构成 $\tilde{X}^C$ 的一个圆锥曲线束，因此 Θ 全体构成10.10意义下的 X 的一个圆束。

17.6.2 应用

17.6.2.1 若 a, b, c, d, e, f 是完全四边形中三对相对的顶点，则以 $\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}$ 为直径的三个圆属于同一个圆

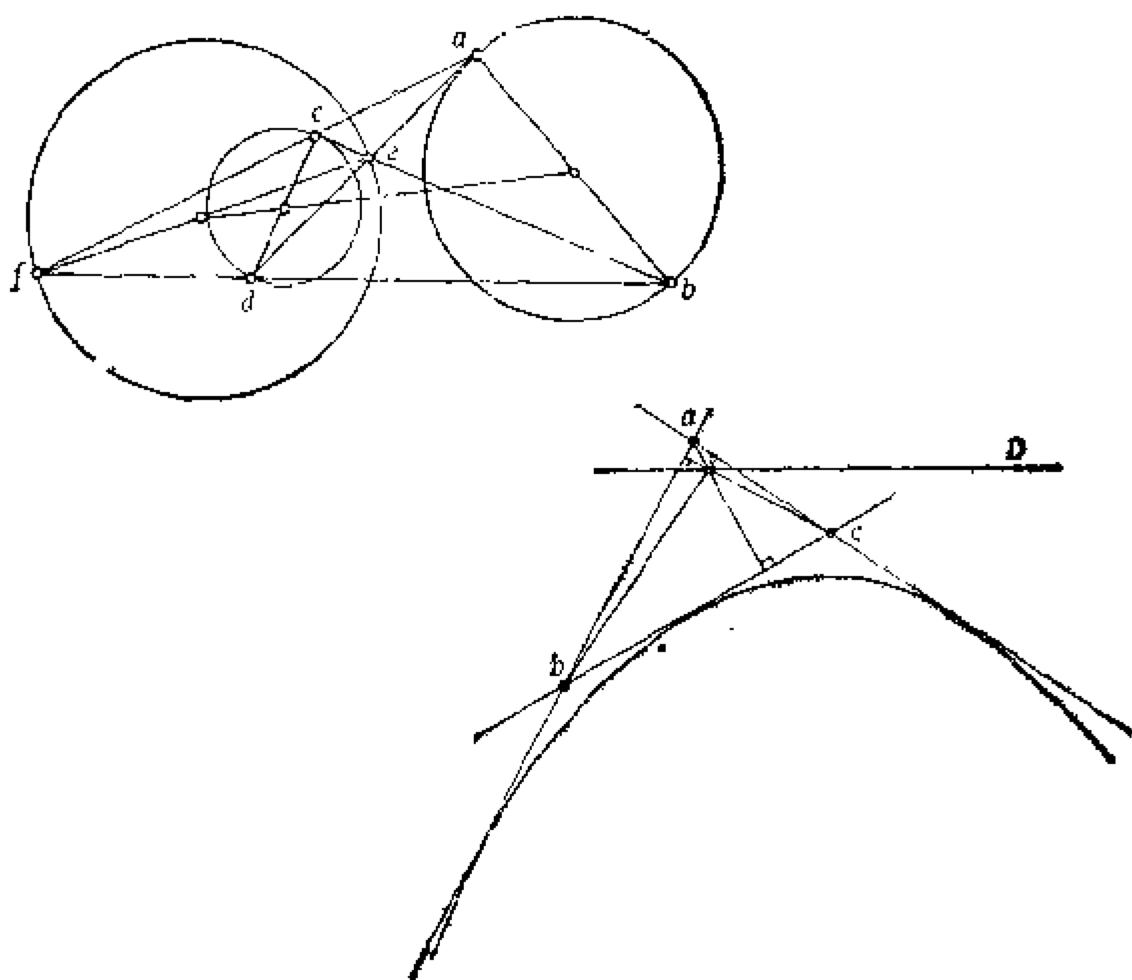


图 17.6.2.

束. 特别, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{c+d}{2}$, $\frac{e+f}{2}$ 共线.

对跟四条直线 ac, cb, bd, da 相切的圆锥曲线的切束应用 17.6.1 和 17.4.2.3, 即可得证.

17.6.2.2 我们对 X 中与给定的三角形的三边 ab, bc, ca 以及无穷远直线 ∞_X 相切的圆锥曲线——它们都是抛物线——的切束应用 17.6.1. 圆锥曲线的切距圆在这儿都是直线, 即这些抛物线的准线, 但对退化为点 a 与 $bc\cap\infty_X$ 的圆锥曲线, 这是过 a 点正交于 bc 的直线. 这样就又证明了 $\{a, b, c\}$ 的三条高是共点的, 但我们看到, 任一跟 $\{a, b, c\}$ 的三边相切的抛物线的准线经过 $\{a, b, c\}$ 的垂心. 一个推论是: 给定四条直线中每三条所构成的三角形的垂心是四点共线的(位于跟这四条直线相切的抛物线的准线上, 参见 16.7.4 和 17.4.3.5). 另一个推论是: 若 f 是

$\{a, b, c\}$ 的外接圆上一点，f 关于 $\{a, b, c\}$ 三边的对称点是共线的，位于过 $\{a, b, c\}$ 的垂心的一条直线（称为象点直线，参见 10.13.16）上。

17.6.3 共焦圆锥曲线

17.6.3.1 具有相同的两个焦点的两条圆锥曲线，称为共焦圆锥曲线；当 f, f' 是 X 上给定的两个不同的点时，以 f 和 f' 为焦点的圆锥曲线全体构成一个切束 $\mathscr{F}^*$. 为说明这一点，我们在 $\tilde{X}^C$ 中进行考察；由 17.4.3 可知，圆锥曲线 $C \in \mathscr{F}^*$ 的充要条件是 $\bar{C}$ 属于 $\tilde{X}^C$ 中跟四条直线 $fI, fJ, f'I, f'J$ 相切的圆锥曲线的切束，而且 $\mathscr{F}^*$ 作为这个切束在 X 上的限制，也是一个切束.

17.6.3.2 可以用初等方法通过计算来证明：若 $f=(c, 0)$，$f'=(-c, 0)$，则所考虑的圆锥曲线方程为：

17.6.3.3

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}-1=0,\ \lambda \in]-c^2, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[.$$

切线方程可通过下列矩阵得出：

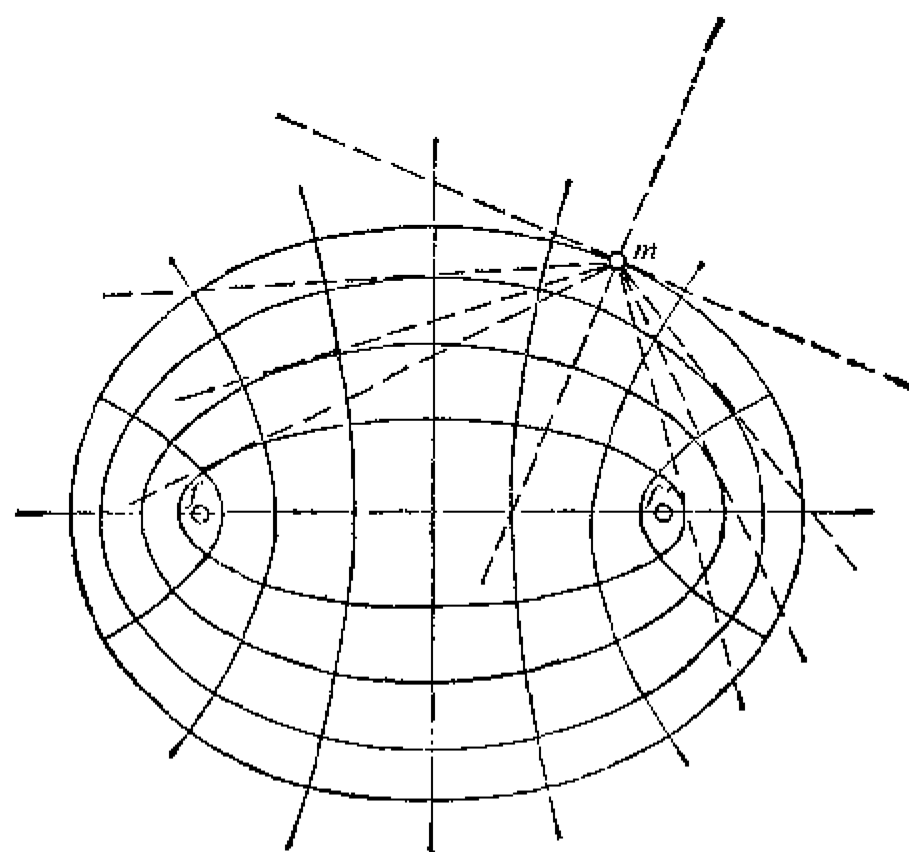
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2+\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

它关于 λ 是线性的（参见 14.6.1 和 15.1.6）. 我们注意到，当 λ 趋于零时，$\lambda^+ \to 0$ 和 $\lambda^- \to 0$ 的极限曲线是不同的，从而切线的极限是退化为两点 f, f' 的圆锥曲线（参见 14.6.3）. 但是在 16.5.6.2 的意义下，$\lambda \to 0$ 的公共极限是二重直线 $y=0$，即横坐标轴.

17.6.3.4 切线. 设 $\mathscr{F}^*$ 是以 f, f' 为焦点的共焦圆锥曲线束，$m \in X$，$m \notin ff'$. 由 16.5.6.3 可知，从 m 向 $\mathscr{F}^*$ 的圆锥曲线所作的切线构成 m^* 的一个对合，它的二重射线是 $\mathscr{F}^*$ 中经过 m 的圆锥曲线在 m 的切线；而这个对合含有偶 $\{mf, mf'\}$，因而在 $\tilde{X}^C$ 中含有偶 $\{mI, mJ\}$. 因此在 X 中存在二重射线，就是直线 mf 和 mf' 的平分线（应用 8.7.7.5，8.8.7 和 6.7.4）. 结果，总存在

$\mathscr{F}^*$中两条过m的圆锥曲线，其中一条与$\{\overrightarrow{mf}, \overrightarrow{mf'}\}$的内平分线相切(这是一条双曲线)，另一条与外平分线相切(是一个椭圆).

17.6.3.5 必须注意，我们在这儿没有用到 17.2.2.4；相反地，从 17.4.3 以及一条射影圆锥曲线出发，上面的讨论表明了，以f，f'









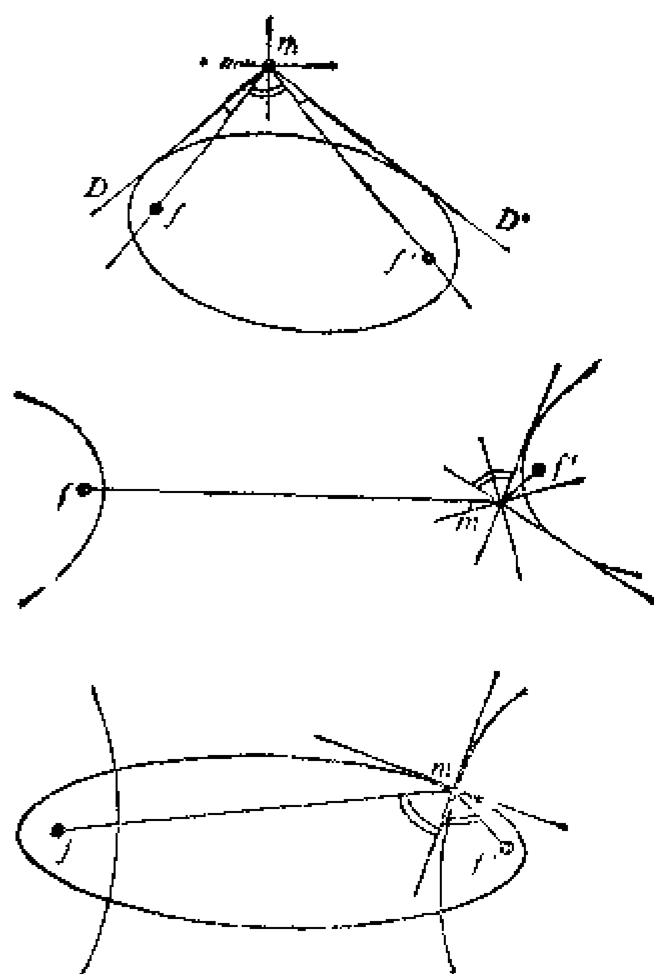


图 17.6.3.3.

为焦点的圆锥曲线的切线是 $\{mf, mf'\}$ 的平分线.应用 15.4.5 和 9.10.1，我们就可得出 17.2.2.2 的一个射影的证明.

17.6.3.6 Poncelet 定理. 上述的 m^* 的对合也表明，若 D, D' 是从 m 向焦点为 f, f' 的圆锥曲线 C 作的两条切线，则 $\{mf, mf'\}$ 和 $\{D, D'\}$ 有相同的平分线;而且，这些平分线就是 $\mathscr{F}^*$ 中过 m 的圆锥曲线的切线．这个结论称为 "Poncelet 第二小定理"(参见 17.2.1.6).

17.6.4 Graves 改进园丁的方法. 这是指 Graves 的一个工作，他把 17.2.2.5 的内容深化如下：设给定一个椭圆 C 和一条长度严格大于 C 的长度的封闭细线，则一个将细线沿 C 绷紧的浮针的轨迹是一个跟 C 共焦的椭圆 C'.

设 m 是浮针的一个位置，C' 是过 m 的跟 C 共焦的椭圆(参见

17.6.3.4)；则由 9.10.4 和 17.6.3 可知 C' 上每点都是浮针的位置．剩下只要说明，除了 C' 以外，浮针不会有其它的位置；但在 C 的每条切线上，恰有两点处浮针是能绷紧细线的(例如可由连续性来说明)；而 T 与 C' 交于两点(参见 14.1.3.4)．这种做法可推广到二次曲面，参见 [GE]，[SD1] 和 [SD2]．

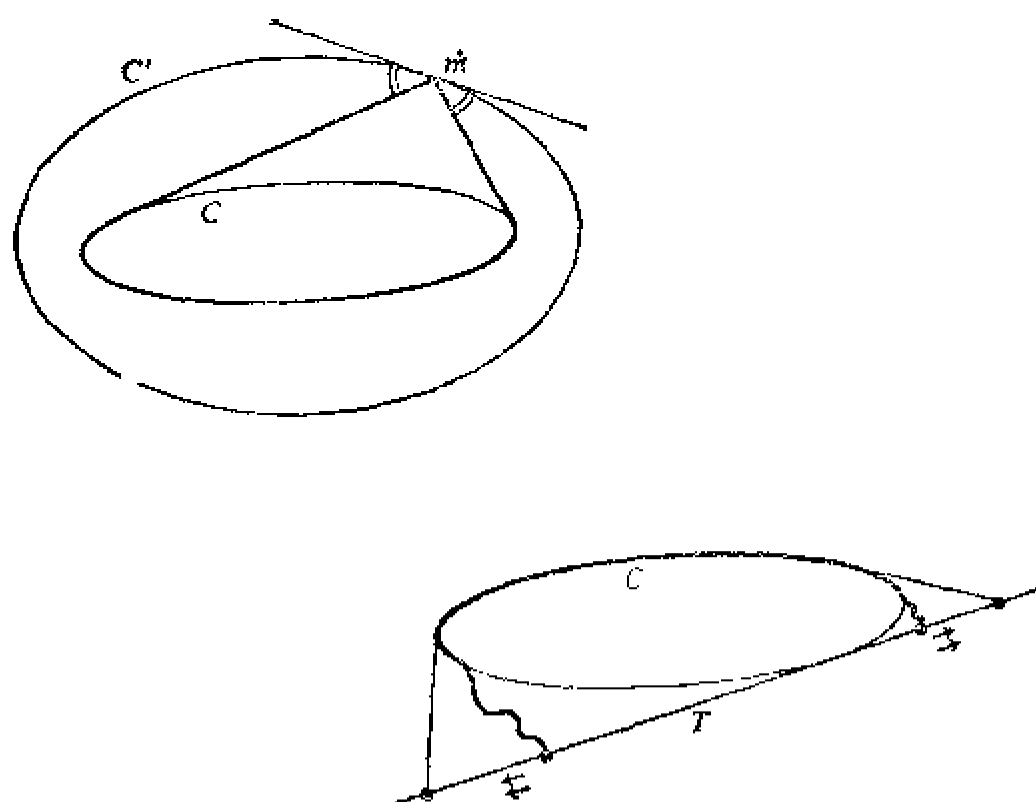


图 17.6.4.

17.6.5 Chasles 对 Poncelet 定理所作的解释：椭圆的极大周长内接多边形． 这是指 Chasles 关于 16.6.11 的共焦椭圆所作的另一种阐述；但它仅仅是 16.6.11 的一种解释，即使在这种特殊情形下也算不得一种证明．

17.6.6 定理． 设 C 是椭圆，n 是任一大于或等于 3 的整数．在具有不同的 n 个顶点、内接于 C 的凸多边形中，有一些是具有极大周长的；事实上这样的多边形有无穷多个，也就是说一个这种极大周长多边形(简称为 PPM)有一个顶点可以是 C 上任意一点．而且，所有这些 PPM 的边都跟同一个和 C 共焦的椭圆 C'_n 相切．

17.6.6.1 首先我们注意到，凸性和顶点不同的要求都是必要的；譬如说 n 是偶数时，以 C 在长轴上的一个顶点作为 $n/2$ 个顶点、以长轴上另一顶点为另 $n/2$ 个顶点所构成的退化多边形的极大周长等于 $2na$ $\left(\text{假定 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\right)$. 一个顶点各不相同，但都在上述顶点的邻近的多边形，其周长是充分接近于 $2na$ 的；但 PPM 的周长要小得多，例如 $n=4$ 时是 $4\sqrt{a^2+b^2}$（图 17.6.6，参见 17.9.6）.

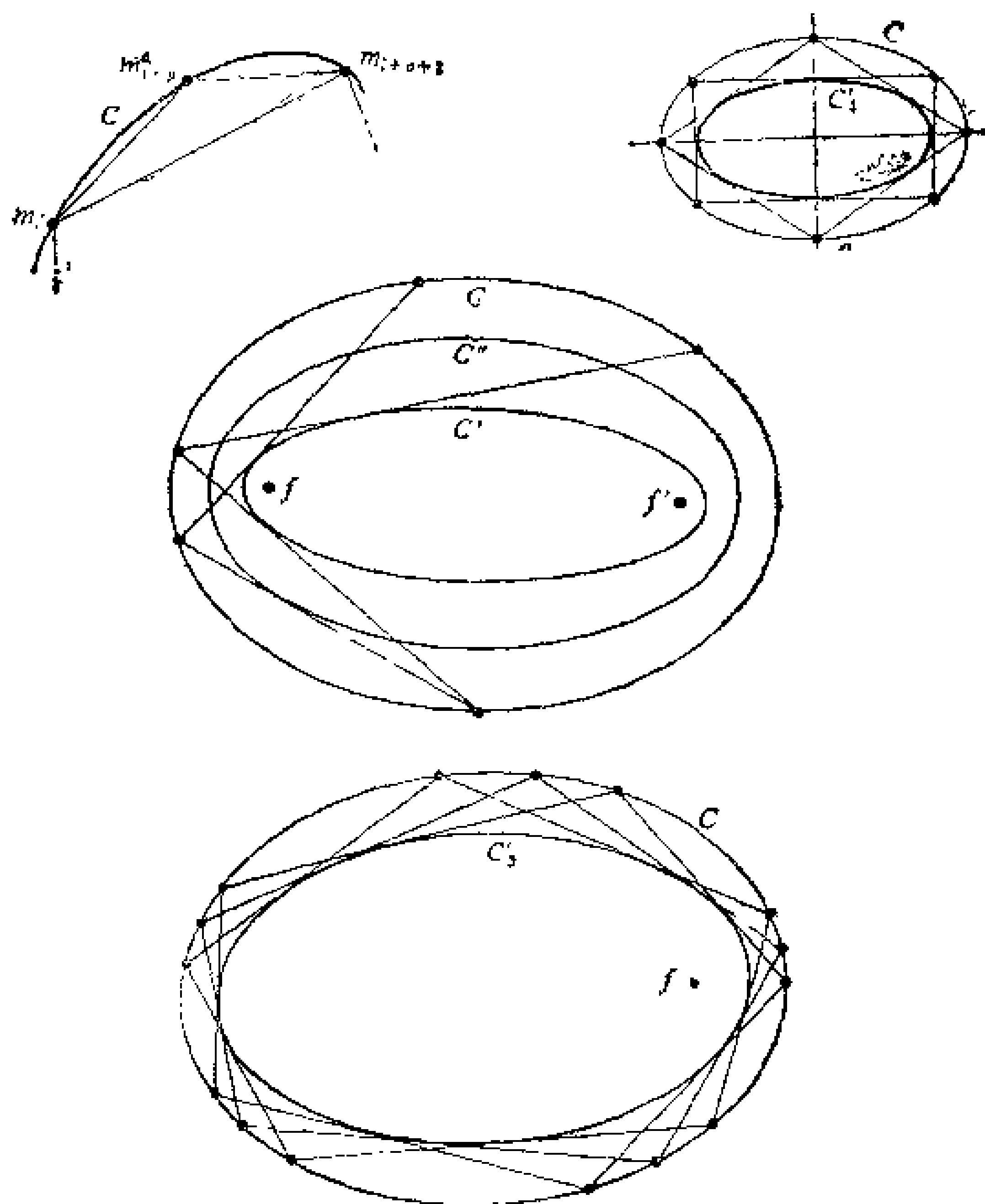


图 17.6.6.

17.6.6.2 具有 n 个不同顶点、内接于 C 的凸多边形构成 C^n 的一个子集 $\mathscr{P}$；设 P 是属于 $\mathscr{P}$ 在 C^n 中闭包 $\bar{\mathscr{P}}$（参见 9.4.2.2）的一个极大周长多边形. 我们要证明 $P\in\mathscr{P}$，而且，若 P 的顶点相继为 $(m_i)_{i=1,\cdots,n}$，则 C 在 m_i 的切线 $T_{m_i}C$ 是 $\{\overrightarrow{m_im_{i-1}},\overrightarrow{m_im_{i+1}}\}$ 的外平分线. 首先设 $m_i=m_{i+1}=\cdots=m_{i+p}, m_{i+p+1}\neq m_i$；在 C 上插进一点 m'_{i+p}，使它严格地介于 m_i 和 m_{i+p+1} 之间，就得到一个 $P'\in\bar{\mathscr{P}}$，其周长严格地大于 P 的周长（参见 9.1.1.1）. 既然所有的顶点都不同，由 9.10.5 即可推得平分线的性质.

17.6.6.3 由于 PPM 有平分线性质，17.6.3.6 就表明了，一个 PPM 可由各边切于同一个与 C 共焦的椭圆 C' 来确定. 由 16.6.11 可知，从这个 PPM 可以导出内接于 C、外切于同一个共焦椭圆 C'，而且一个顶点可以在 C 上任取的多边形；但对这些多边形的每个顶点应用 9.10.1 可知，它们跟这个导出它们的 PPM 有相同周长. 剩下要说明的是任一 PPM 必定是上述多边形中的一个；设 $m\in C$ 是它的一个顶点，C'' 是它的各边与之相切的椭圆；则存在两个共有顶点 m 的内接于 C 的 n 边形，其中一个的各边与 C' 相切，另一个与 C'' 相切. 若 $C''\neq C'$，就可假定，譬如说 C'' 含于 C 和 C' 之间；由图可知这是不可能的.

17.6.7 评注. 17.6.6 保证了当 $n\geqslant 3$ 时具有 n 个顶点、内接于 C、外切于圆锥曲线 C'_n 的多边形的存在性.

Cayley 公式（参见 16.6.12.4）则具体给出了 λ，使对给定的 n 和以 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 为方程的 C，C'_n 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$（参见 17.6.3.3）. 读者可就 $n=3$ 和 $n=4$ 的情形试一下（也可参见 17.9.6）.

17.7 椭圆的特殊性质

17.7.1 椭圆，圆的正投影. 空间中某一平面上的一个圆在另一平面上的正投影是一个椭圆；在同一平面上，从圆 $x^2+y^2=a^2$ 出

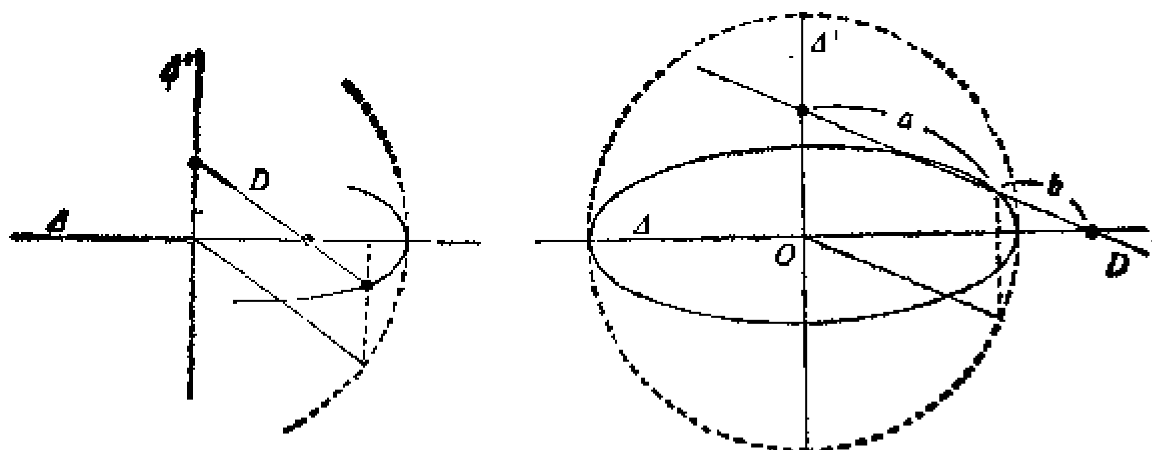


图 17.7.1.

发，经仿射变换 $(x, y)\longmapsto\left(x, \frac{b}{a}y\right)$ 后得到椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

由此可得出椭圆的一个机械作图法，称为"纸带作图法"：若一条直线上的两点被强制地画出两条正交的直线 Δ, Δ'，则 D 上任一固定点画出一个以 Δ, Δ' 为轴的椭圆（也可参见 17.9.14）。图 16.7.2 的作法也是由这个仿射变换导出的。

17.7.2 参数化. 17.7.1 启发我们对椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 应用周期参数表示 $t\longmapsto(a\cos t, b\sin t)$；这在 16.2.9 的意义下并不是一个"良好参数化映射"。我们借助于

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\theta:\ \theta\longmapsto\left(a\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \frac{2b\theta}{1+\theta^2}\right)$$

从上述参数表示导出一个"良好"的来，它在齐次坐标系下可写为 $\theta\longmapsto(a(1-\theta^2), 2b\theta, 1+\theta^2)$.

17.7.3 例. 在上述参数化映射下，具有参数 $t_i(i=1,2,3,4)$ 的点 m_i 成为上循环点的充要条件是

$$t_1+t_2+t_3+t_4\equiv 0(\text{mod. } 2\pi);$$

它们是从同一点所作的四条法线的垂足的充要条件是

$$t_1+t_2+t_3+t_4\equiv \pi(\text{mod. } 2\pi)\ \text{以及}$$

$$t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4\equiv 0(\text{mod. } 2\pi).$$

17.7.4 包络. 在椭圆上一点m处,曲率中心跟法线与法线族的包络(称为C的**包络**)的交点重合;若 $m=(a\cos t, b\sin t)$,我们就看到这个曲率中心是$\left[\frac{c^2}{a}\cos^3 t, -\frac{c^2}{b}\sin^3 t\right]$这一点.包络的方程是$(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=c^{4/3}$;它是由一条星形线(参见 9.14.33.3.F)经仿射变换得到的.

从 $m\in X$ 向C所作的法线的条数,与m跟这个包络的相对位置有关;如图 17.7.4 所示,在内部有 4 条,在外部以及四个尖点都有 2 条,在边界上其它点都有 3 条.

与 17.5.5.4 不同的一种在m处曲率中心的作图法,如图 17.7.4 所示.

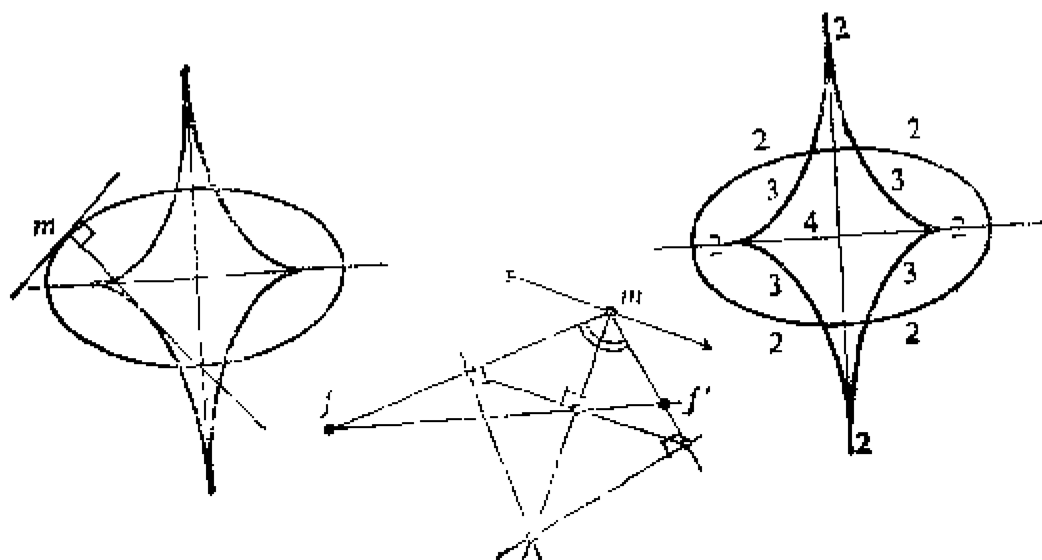


图 17.7.4.

17.7.5 面积与长度. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 的面积是 πab (参见 11.8.9.4).而长度是

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt,$$

并不能用简单的常数来表示;这里遇到的是所谓椭圆函数,这类函数也正是由此得名的.

17.7.6 椭圆的其它一些性质,可见 17.9.6, 17.9.11 至 17.9.15,

17.9.22.

17.8 双曲线的特殊性质

双曲线总是跟它的渐近线一起作出的；这样做有好多理由可说，其中之一是：这样就不会画出一条居然跟一条直线交于不同四点的双曲线来了：图 17.8.1 和 14.1.3.4.

17.8.1 举例来说，若直线 D 与双曲线 C 交于 m, m'，与渐近线交于 u, u'，则有 $\frac{m+m'}{2}=\frac{u+u'}{2}$；特别当 D 是 C 在 m 处的切线时，$m=\frac{u+u'}{2}$. 这样，只要知道双曲线的两条渐近线和一点，就可以很快地逐点描出这条双曲线来. 图 16.7.3 就是根据截线的这种性质作出的.

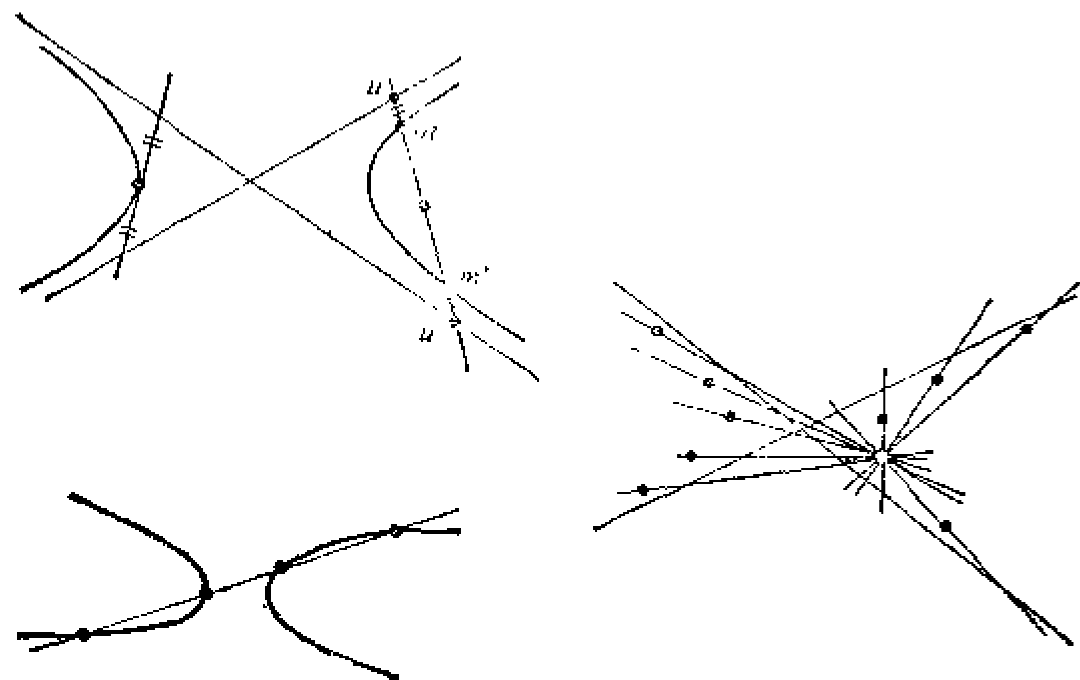


图 17.8.1.

17.8.2 参数化. 关于 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$，我们对右侧连通分支作参数变换 $t\longmapsto(a\operatorname{ch}t,\ b\operatorname{sh}t)$，对左侧连通分支作

$$t\longmapsto(-a\operatorname{ch}t,\ b\operatorname{sh}t).$$

读者可以考虑在双曲线的情形下，17.7.3 和 17.7.4 会变成怎样。

17.8.3 等轴双曲线（HE）

17.8.3.1 在 17.5.4 中我们已经碰到过这种双曲线的一些性质；特别是，经过三点 a，b，c 的 HE 全体构成一个束，它们的中心的轨迹是三角形 $\mathscr{C}=\{a,b,c\}$ 的九点圆。

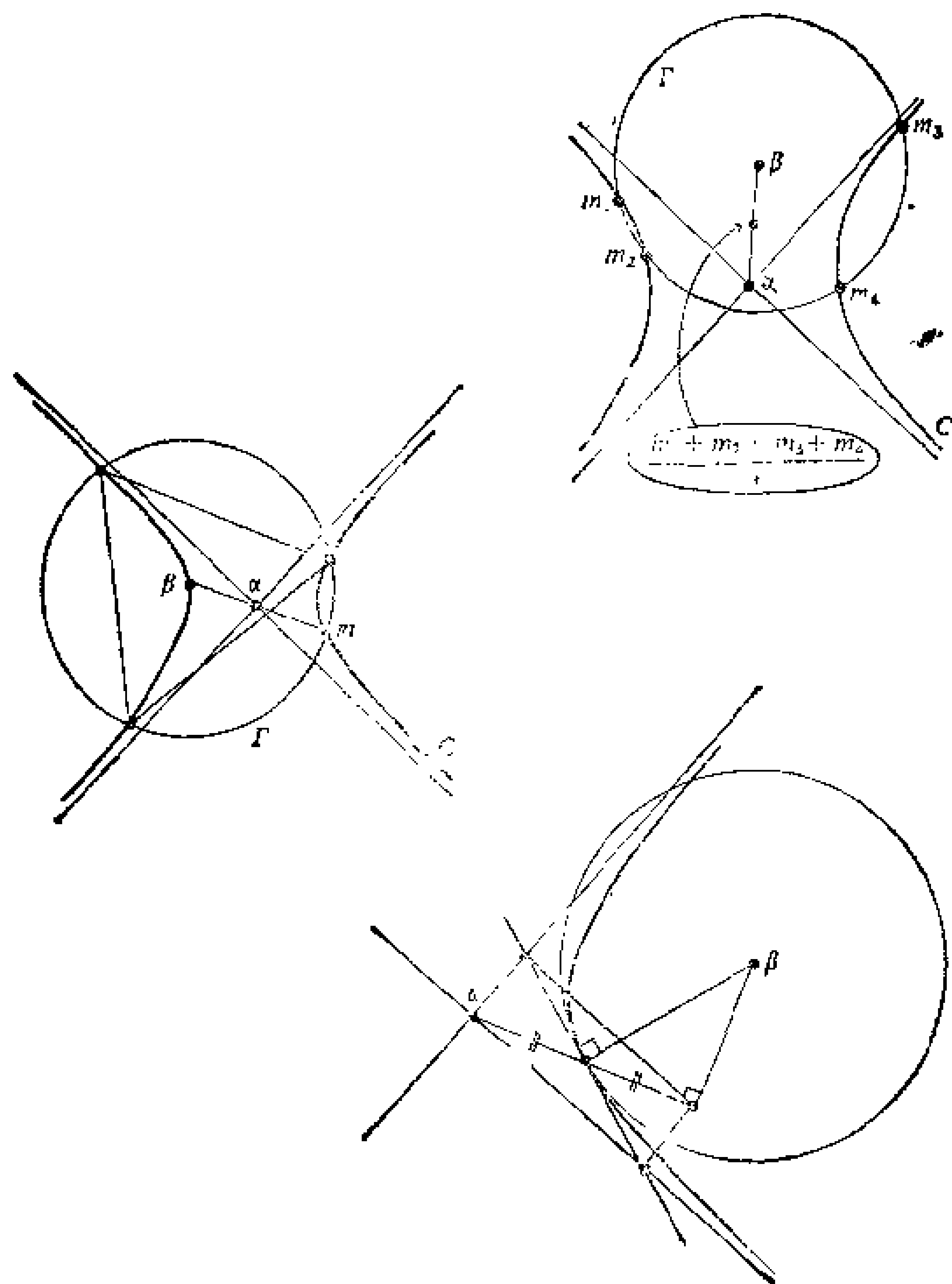


图 17.8.3.

17.8.3.2 对这个三角形 $\mathscr{C}$，一条经过 a, b, c 的 HE 的任何一条渐近线必是 $\mathscr{C}$ 的外接圆上某一点的 Simson 直线(参见 17.4.3.5 或 10.4.5.4)；反之亦然. 于是由 9.14.33.3.D 可知，外接于 $\mathscr{C}$ 的 HE 的渐近线集合的包络是一条有三个尖点的内摆线.

17.8.3.3 上循环点. 若圆 Γ 与等轴双曲线 C 交于 $C\square\Gamma=\{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$ (参见 16.5.1)，若 β 是 Γ 的中心，α 是 C 的中心，则有

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\omega_i m_i=\frac{\beta+\alpha}{2}.$$

由此得出两个推论：第一，若 Γ 的中心 β 位于 C 上，Γ 经过 m 点且使 $\alpha=\frac{m+\beta}{2}$，则 Γ 与 C 交于另外三点，它们构成一个等边三角形. 第二，曲率中心的作法如图 17.8.3 所示.

C 上的点 $(m_i)_{i=1,\cdots,4}$ 是上循环点的充要条件是

$$\prod_i d(m_i, A)=\frac{a^4}{4},$$

其中 A 是 C 的一条渐近线，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 是 C 的一个方程.

17.8.4 注. HE 的其它性质，可见 [LM2].

17.9 练 习

17.9.1 焦圆. 对于以 q 为方程的非空正常圆锥曲线 C，称任何一个其方程可写成 $q+k\varphi^2$ 的圆为 C 的焦圆，其中 φ 是一个仿射形式. 试讨论 φ 的可能性. 对三类圆锥曲线，画出不同的焦圆族. 超切圆是焦圆吗?

证明对于任何焦圆 Γ，存在一条直线 D(相应的准线)使

$C=\{m\in X: m$ 关于 Γ 的方幂 $=c(d(m, D))^2\}$.

反之亦然. 是否可以用"比利时人的说法"来证明这一性质?

若 Γ, Γ' 是两个焦圆，证明在某种情形下

$C=\{m\in X:(m$ 关于 Γ 的方幂$)^{1/2}$

$+(m$ 关于 Γ' 的方幂$)^{1/2}=$常数$\}$.

可以用"比利时人的说法"来证明这一性质吗?

讨论焦圆与双切于 C 的圆之间的关系.

17.9.2 竖放的圆形弹子盘. 一颗重量必须考虑的钢球在竖放的圆盘内部运动;它在圆盘最低处所施加的初速度的作用下,作完全的弹性碰撞. 试给出钢球作周期运动的例子.

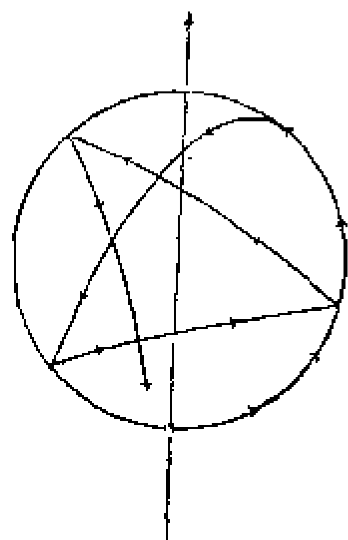


图 17.9.2.

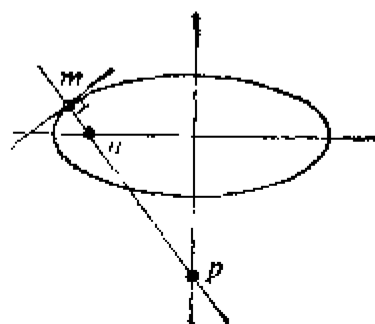


图 17.9.9.

17.9.3 通过计算证明 17.5.5.6.

17.9.4 用初等的方法证明 17.5.5.1.

17.9.5 证明: 圆 Γ 调和外切于圆锥曲线 C 的充要条件是 Γ 正交于 C 的切距圆(或直线)(若这个切距圆不存在, 则正交性可如第20章中的意义理解). 考虑等轴双曲线以及抛物线的情形.

17.9.6 证明存在无穷多个矩形外切于椭圆 C、内接于 C 的切距圆 Γ. 根据关于 C 的对偶性,不用 16.6.11, 由上述结论在 $n=4$ 的情形下推出 17.6.6.

17.9.7 若一个凸多边形有 n 个不同顶点, 内接于 C, 且是 PPM (从而外切于 C'_n),则该多边形在所有外切于 C'_n 的多边形中是具有极小周长的.

17.9.8 讨论所有内接于(相应地,外切于)一个给定的椭圆的多边形中具有最大(相应地,最小)面积的多边形.

17.9.9 设C是一条有心圆锥曲线，点 $m\in C$，p，n是C在m处法线与C的两条轴的交点；证明比值 mp/mn 是常数并算出这个常数。证明其逆命题。由此求出在C的顶点处的曲率半径的值。

17.9.10 **Joachimsthal 定理**．考虑一条有心圆锥曲线的四条共点的法线的垂足，经过其中三点的圆必定经过第四点的中心对称点．也可参见 17.7.3.

17.9.11 **Chasles 圆**．两点 m，m' 以相等的角速度沿不同方向画出两个同心圆．它们的中点 $\frac{m+m'}{2}$ 画出的轨迹是什么？考虑与纸带作图法之间的联系(参见 17.7.1).

17.9.12 设 m，n是以ω为中心的椭圆C的两点，且使ωm，ωn成直角；证明 $\frac{1}{(\omega m)^2}+\frac{1}{(\omega n)^2}$ 是常数；直线 mn 的包络是什么？

设a是严格地位于以ω为中心的椭圆C内部的一点，D是过a点的直线，与C交于m，n；$p\in C$ 且 ωp平行于D．证明比值 $\frac{am\cdot an}{(\omega p)^2}$ 是常数．

设D，D'是欧氏结构中两条正交直线，都经过a，分别交C于m，n和m'，n'；证明 $\frac{1}{am\cdot an}+\frac{1}{am'\cdot an'}$ 是常数．直线 mm' 的包络是什么？参见 15.7.9.

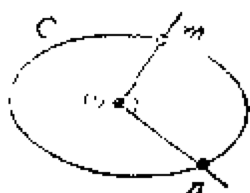


图 17.9.12.

17.9.13 给定椭圆 C，$m\notin C$，讨论x沿C变动时函数 $x\longmapsto xm$ 的变化情形．

17.9.14 **Lahire 定理**． 直线D上两个定点沿任意两条固定直线Δ，Δ' 滑动；证明固定在D上的任何一点画出一个椭圆．

17.9.15 设 $m_i(i=1,2,3,4)$ 是椭圆C的四个上循环点，n_i是

C 在 m_i 处的密切圆与 C 的异于 m_i 的交点；证明 n_i 也是上循环点．这一结论对双曲线或抛物线也成立吗？

17.9.16 证明：对一条以 ω 为中心的等轴双曲线来说，若一条以 ω 为极的对数螺线跟它相切，则该螺线是它的固有反极线（参见14.6.4）。

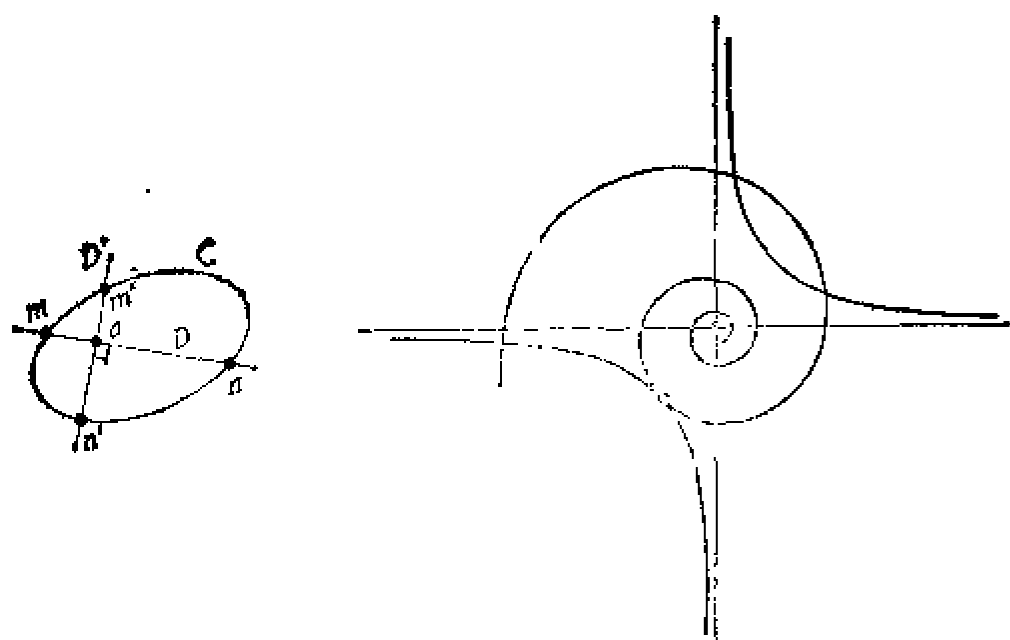


图 17.9.16.

17.9.17 设已给定两条同心的等轴双曲线 H 和 H'．存在内接于 H、外切于 H' 的三角形的充要条件是 H 的焦点在 H' 的准线上．

17.9.18 抛物线的性质

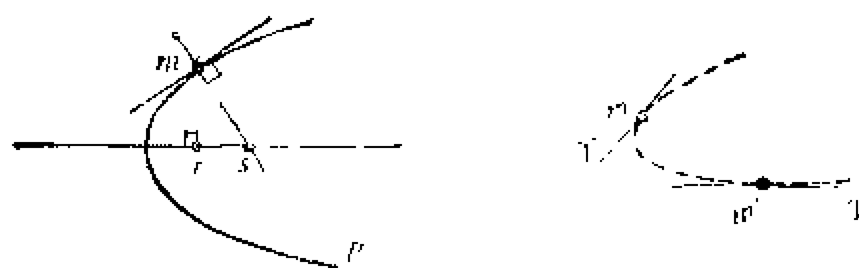


图 17.9.18.

17.9.18.1 次法距． 设 P 是一条抛物线，$m \in P$；P 在 m 处的法线交 P 的轴于 s，m 在轴上的投影是 r．证明距离 rs 是常数．并据此说明，已知抛物线上两点 m，m' 以及在这两点处的切

线 T，T' 后，怎样几何地作出抛物线的轴？

17.9.18.2 由一点出发的法线（参见 17.5.5.4 和 17.9.10）。证明抛物线 P 在三点 m, m', m'' 的法线共点的充要条件是重心

$$\frac{m+m'+m''}{3}$$

位于 P 的轴上，或者是经过 m, m', m'' 的圆含有 P 的顶点。

17.9.18.3 内接于一个圆、外切于一条抛物线的四边形的对角线的交点位于这条抛物线的准线上。

17.9.19 考虑两个旋转二次曲面，它们的旋转轴相交；它们的公切面必与轴在上述两条轴所在平面上的第三个旋转二次曲面相切。六个焦点构成一个完全四边形。

17.9.20 从一条圆锥曲线上的一点引与该圆锥曲线成定角的弦，求它们的包络；考虑直角的情形。

17.9.21 跟一个椭圆的任一对共轭直径相切、中心在该椭圆上的圆的半径是固定的。

17.9.22 由两条共轭半直径决定一个椭圆. 设 Oa，Ob 是椭圆 C

图 17.9.22.

的两条共轭的半直径. 证明可如下作出 C 的轴来：过 a 作直线垂直于 Ob，从 a 向该直线两侧截取 Ob 的长度；这样就得到两点 u, v，而 Ou, Ov 的两条平分线就是所求的两条轴.

17.9.23 在 X 中给定一个圆 C 和 C 上两点 a, b. 考虑经过 a, b 而且中心与 ab 的中点重合的、与 C 相切的椭圆 E. 证明所有这些椭圆都有相同的离心率.

17.9.24 焦点的实用求法. 在标准正交仿射标架下给出 X 中圆锥曲线 C 的方程为 $f(x, y) = 0$. 证明 C 的焦点的坐标 (α, β) 可由 $F(\varepsilon i, -1, \beta - \varepsilon i\alpha) = 0$ 求得，其中 $\varepsilon = \pm 1$, $i = \sqrt{-1}$, $F(u, v, w) = 0$ 是在与上述标架自然相应的射影标架下 C 的切线方程.

参考书目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique*, Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p 3-38.

[AE] *Astrononie*, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de* $\mathbb{R}^3$ *et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA] BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908, p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*, Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*, Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute, Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*, Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition, Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre, chapitres 1 à 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., nº 41.

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, n° 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale* (4 *volumes*), Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique, vol.* 1, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale* (2 *volumes*), Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints, Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*, John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*, The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II : Topologie*, Masson.

[CY] CHEVALLEY (Claude). *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques*, *2e édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, *3e édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M.S. Symposium on Convexity, Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, nº 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.). *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press.

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne*, *3e édition*, Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*. Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., n° 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.), *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux*, Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*, Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*, preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannische Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics*, n° 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*; Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*, Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*), Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral*, Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*, Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*, Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome I*, 10e *édition*, Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II*, 7e *édition*, Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KÜNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*, C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard*, l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers*, Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). ***Géométrie différentielle***, Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*, Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIÈS (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome 3*, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes*, Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère*, Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume 4 : la convexité*, CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra*, Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry*, Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain*, Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie*, J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography*, American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals*, Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne*, Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions, Proceedings of Liverpool Singularities, Symposium I*, Lecture Notes in Mathematics n° 192, Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (François). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, fascicule I*, C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Annals of Mathematical Studies, nº 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions*, p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds*, J. of Differential Geometry, 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms*, Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities*, American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces*, Memoirs of the A.M.S., nº 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées*, édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry*, Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie*, Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications*, SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry*, Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem, Contributions to the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen*, Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth Problem*, Soviet Math. Doklady, 14, 1973, p. 46-49.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren nº 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 1re partie*, Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 2e partie*, Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension 3*, Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens*, l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane*, Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane*, Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles*, preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering*, Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions*, Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups : their recognition and notation*, American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons*, Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides*, Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flächen Zweiter Ordnung*, Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux*, Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups*, Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif*, C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*, Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970, p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, n° 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, n° 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

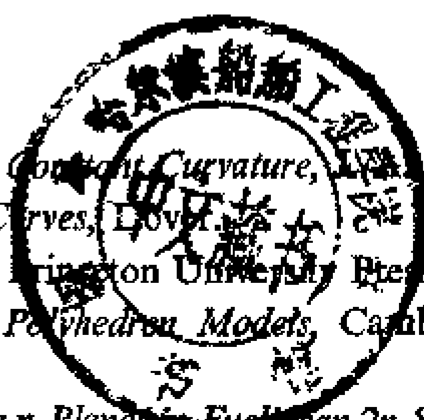
[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson.

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.



[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature,* [illegible] Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves,* Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry,* Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models,* Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations,* Memoirs of the A.M.S., nº 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,* Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures,* Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire,* Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications,* Dover.